РЕАЛИЗАЦИЯ ДИВИЗОРОВ И ФАКТОРИЗУЕМЫЕ МОДУЛИ НАД НЁТЕРОВЫМИ ЦЕЛОЗАМКНУТЫМИ КОЛЬЦАМИ

Г. Б. Клейнер

Пусть A — кольцо Крулля, $D(A)$ — полугруппа его целых дивизоров. Дивизором вектора $x = (a_1, \ldots, a_n) \in A^n$ называется наибольший общий дивизор элементов $a_1, \ldots, a_n$; если $S = \{x_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$,— множество векторов $x_\alpha \in A^n$, то через $\operatorname{div} S = \operatorname{div}\{x_\alpha\}$ будем обозначать наибольший общий дивизор элементов $x_\alpha \in S$.

1. В [1] доказано, что всякий подмодуль $M \subset A^n$ ранга >1 содержит элемент $x_0 \in M$ с $\operatorname{div} x_0 = \operatorname{div} M$. Если M — замкнутый в A^n модуль (т. е. A^n/M не имеет кручения), то $\operatorname{div} M = 1$ [2], поэтому в любом замкнутом модуле $M \subset A^n$ ранга >1 единичный дивизор можно реализовать в качестве дивизора одного из элементов M. Допускают ли такую реализацию все дивизоры из $D(A)$? Следующая теорема, положительно отвечая на этот вопрос, обобщает известный результат о реализации $D(A)$ в виде множества дивизоров элементов модуля A^n.

Теорема 1. *Пусть A — кольцо Крулля, M — произвольный замкнутый в A^n подмодуль ранга $m \geqslant 2$. Тогда для любого дивизора $\delta \in D(A)$ существует такой элемент $x \in M$, что* $\operatorname{div} x = \delta$.

Доказательство. Пусть x_0, y — такие элементы в M, что $\operatorname{div} x_0 = 1$, $\operatorname{div} y$ кратен δ и $x_0 \wedge y \neq 0$. Существует такой элемент $a \in A$, что a делится на δ, а $\operatorname{div} a/\delta$ взаимно прост с $\operatorname{div} y/\delta$; пусть $x = ax_0$, $\Delta = \operatorname{div}(x \wedge y)$. Очевидно, $\operatorname{div}(x, y) = \operatorname{div}(a \operatorname{div} y)$ делится на δ и не делится ни на какой дивизор, кратный δ. Согласно лемме 1 [3] существует такой элемент $b \in A$, что $\operatorname{div}(x + by, \Delta) = \operatorname{div}(x, y, \Delta)$. Но $\Delta = \operatorname{div}(x \wedge y) = \operatorname{div}(x + by, \Delta)$ кратен $\operatorname{div} x$, $\operatorname{div} y$ и $\operatorname{div}(x + by)$, поэтому $\operatorname{div}(x + by) = \operatorname{div}(x + by, \Delta) = \operatorname{div}(x, y, \Delta) = \operatorname{div}(x, y) = \delta$.

2. Пусть M — произвольный A-модуль без кручения. Ненулевой элемент $\xi \in M$ называется неприводимым, если из $\xi = a\eta$ ($a \in A$, $\eta \in M$) следует, что a обратим. Представление $x \in M$ в виде $x = a\xi$, где $a \in A$, $\xi \in M$, называется каноническим разложением, если ξ неприводим в M. Канонические разложения $x = a\xi$, $x = a'\xi'$ считаются одинаковыми, если $\xi = u\xi'$, где $u \in A$ обратим. Модуль M называется факторизуемым, если всякий его ненулевой элемент имеет единственное каноническое разложение. В [4] анонсировано, что над нётеровым целозамкнутым, но не факториальным кольцом не существует конечно-порожденных факторизуемых модулей ранга $m \geqslant 3$ и поставлен вопрос о существовании таких модулей при $m = 2$. Отрицательный ответ на этот вопрос следует из теоремы 1 и лемм 1, 2 и 3.

Лемма 1 [4]. *Всякий факторизуемый конечно-порожденный модуль над нётеровым целозамкнутым кольцом рефлексивен.*

Лемма 2. *Всякий конечно-порожденный рефлексивный модуль без кручения над нётеровым целозамкнутым кольцом вкладывается в некоторый свободный в качестве замкнутого подмодуля.*

Лемма 3. *Если $x = a\xi$ — каноническое разложение элемента x некоторого замкнутого факторизуемого модуля, то* $\operatorname{div} x = a$.

Теорема 2. *Всякое нётерово целозамкнутое кольцо, над которым существует конечно-порожденный факторизуемый модуль ранга >1, факториально.*

ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. Б. Клейнер, О теореме редукции Н. Бурбаки, Труды МИИТ **473** (1974), 156—160.

[2] Г. Б. Клейнер, О плюккеровых свойствах колец, Матем. сб. **84 (126)**:4 (1971) 528—536.

[3] Г. Б. Клейнер, Круллевы *OP*-кольца плюккеровы, Изв. АН, сер. матем. **37**:2 (1973), 289—307

[4] A. M. Nicolas, Modules factorables de type fini et de rang $n \geqslant 2$, localise d'un module factorable, C. R. **280** (1973), 1717—1718.

Поступило в Правление общества 18 ноября 1975 г.