УДК 519.48

О плюккеровых свойствах колец

Г. Б. Клейнер (Москва)

Пусть A—коммутативное кольцо с 1, A^n — прямая сумма n экземпляров кольца A и $\Lambda^m(A^n)$ — внешняя алгебра A-модуля A^n $(1 \leqslant m < n)$. Тогда m-вектор $\omega \in \Lambda^m(A^n)$ называется разложимым, если существуют 1-векторы $x_1, \ldots, x_m$ из $\Lambda^1(A^n) = A^n$ такие, что $\omega = x_1 \wedge \ldots \wedge x_m$. Если $\omega = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_m \leqslant n} a_{i_1 \ldots i_m} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_m}$ (где $e_1, \ldots, e_n$ — образующие A^n), то разложимость ω эквивалентна, очевидно, существованию $m \times n$-матрицы над A, у которой для любого набора индексов $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_m \leqslant n$ минор порядка m, заключенный в столбцах $i_1, \ldots, i_m$, равен $a_{i_1 \ldots i_m}$.

В соответствии с этим последовательность $\{a_{i_1 \ldots i_m}\}$ из C_n^m элементов кольца A называется $m \times n$-детерминантной, если для нее существует такая $m \times n$-матрица.

Известно, что в случае, когда A — поле, для разложимости $\omega \in \Lambda^m(A^n)$ $(2 \leqslant m < n)$ необходимо и достаточно выполнение соотношений Плюккера между его координатами

$$\sum_{s=0}^{m} (-1)^s a_{i_1 \ldots i_{m-1} j_s} a_{j_0 \ldots \hat{j}_s \ldots j_m} = 0$$

(см., например, [1]); в других терминах это условие выражается равенством ранг $K_\omega = m$, где $K_\omega = \{x \in A^n : x \wedge \omega = 0\}$ (см. [2]).

Естественно, возникает задача о нахождении необходимых и достаточных условий разложимости m-вектора $\omega \in \Lambda^m(A^n)$ для произвольного коммутативного кольца A. Кольца, в которых для некоторых m и n разложимость каждого m-вектора из $\Lambda^m(A^n)$ обеспечивается уже соотношениями Плюккера между его координатами, называются $m \times n$-плюккеровыми кольцами. Кольца, являющиеся $m \times n$-плюккеровыми для всех m и n $(2 \leqslant m < n)$, называются плюккеровыми. Наконец, кольца, являющиеся $m \times (m+1)$-плюккеровыми для любых $m \geqslant 2$, получили название OP (outer product)-колец.

Отметим, что вопросы разложимости элементов из $\Lambda^m(A^n)$ интересны и благодаря своей связи с проблемой Серра. Как известно, для колец, над которыми проективные конечнопорожденные модули стабильно свободны (в частности, для колец многочленов от нескольких переменных над алгебраически замкнутым полем), эта проблема эквивалентна вопросу о дополнимости до единичного определителя строки из m элементов

кольца A, порождающих единичный идеал. В свою очередь это утверждение, как нетрудно показать, равносильно $(m-1)\times m$-детерминантности этой последовательности, т. е. разложимости соответствующего $(m-1)$-вектора из $\Lambda^{m-1}(A^m)$.

Таким образом, над OP-кольцом стабильно свободные конечнопорожденные модули свободны.

Систематическое изучение круга вопросов, связанных с разложимостью элементов $\Lambda^m(A^n)$ для $n=m+1$, впервые было предпринято Лисснером [3]. Ряд последних результатов в этой области можно найти в статье [4].

В настоящей работе вопросы, связанные с разложимостью m-векторов из $\Lambda^m(A^n)$, рассматриваются в основном для целостных колец Крулля [8].

В § 1 доказываются теоремы 1, 2 и 3, обобщающие в различных направлениях следующую теорему: *если A — целостное кольцо Крулля и $\omega\in\Lambda^m(A^n)$, то для разложимости ω достаточно (а если* $\operatorname{div}\omega=1$, *то и необходимо), чтобы $K_\omega=\{x\in A^n : x\wedge\omega=0\}$ был свободным A-модулем ранга m.* Теоремы 1, 2, 3 обобщают, уточняют и частично обращают также некоторые результаты Таубера [4].

§ 2 посвящен изучению минимальной и коциклической разложимости m-векторов для случая факториальных колец (определения см. в § 2).

В [4] доказано, что кольцо многочленов от одной переменной над дедекиндовой областью плюккерово и что глобальная размерность нётерова плюккерова кольца не больше 2. В § 3 настоящей работы приведен пример нётерова кольца глобальной размерности 2, не являющегося плюккеровым; там же дается характеризация факториальных плюккеровых колец.

Все рассматриваемые кольца — коммутативные целостные кольца с 1, все модули — унитарные. Так как для разложимости ω в $\Lambda^m(A^n)$ необходима разложимость ω в $\Lambda^m(Q^n)$ (Q — поле частных A), мы, как правило, будем предполагать, что ω удовлетворяет условию Плюккера.

§ 1

Пусть T — A-модуль без кручения и M — его A-подмодуль. Замыканием M в T назовем множество тех $x\in T$, для которых существуют $a\in A\setminus 0$-такие, что $ax\in M$. Обозначим замыкание M в T через $\widetilde{M}$. Ясно, что $\widetilde{M}$— A-подмодуль T и $M\subset\widetilde{M}\subset T$. Подмодуль M модуля T будем называть замкнутым в T, если $\widetilde{M}=M$.

Операция замыкания обладает следующими легко проверяемыми свойствами: пусть M, M_1, M_2 — A-подмодули T и S — мультипликативная система в A, тогда

I) $\widetilde{\widetilde{M}}=\widetilde{M}$,

II) $M_1\subset M_2\Rightarrow\widetilde{M}_1\subset\widetilde{M}_2$,

III) $\widetilde{M}_1+\widetilde{M}_2\subset\widetilde{M_1+M_2}$,

IV) $S^{-1}(\widetilde{M})=\widetilde{S^{-1}(M)}$

(слева замыкание берется в T относительно A, а справа замыкание берется в $S^{-1}T$ относительно $S^{-1}A$).

В дальнейшем мы иногда будем говорить о замыкании модуля, не указывая, в каком надмодуле оно берется. В этом случае подразумевается, что модуль является подмодулем A-модуля A^n для какого-либо $n>0$, и замыкание берется в A^n.

Нам понадобится следующее свойство замкнутых в A^n модулей: замкнутые модули, и только они, являются модулями внешних аннуляторов всевозможных m-векторов $\omega \in \Lambda^m(A^n)(1 \leqslant m < n)$, т. е. модулями вида $K_\omega = \{x \in A^n : x \wedge \omega = 0\}$.

Заметим, что замкнутые в A^n модули ранга m можно охарактеризовать как модули решений всевозможных систем из m линейных уравнений относительно n неизвестных с коэффициентами из A; таким образом, замкнутые модули ранга m представляют собой аналог m-мерных плоскостей в n-мерном аффинном пространстве.

Мы используем в дальнейшем следующее легко доказываемое утверждение: если M и N — два A-модуля одинакового ранга, M — подмодуль N и S — мультипликативная система в A, то $S^{-1}(M:N) \subset S^{-1}M : S^{-1}N$, а в том случае, когда N конечнопорожден, $S^{-1}(M:N) = S^{-1}M : S^{-1}N$.

Пусть теперь A — кольцо Крулля и $\omega = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_n \leqslant n} a_{i_1 \ldots i_m} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_m} \in \in \Lambda^m(A^n)$, где $e_1, \ldots, e_n$ — базис A^n и $a_{i_1 \ldots i_m} \in A$. Введем следующее

Определение. Дивизором m-вектора ω ($\operatorname{div}\omega$) назовем наибольший общий дивизор элементов $a_{i_1 \ldots i_m}$.

Очевидно, это определение не зависит от выбора базиса в A^n, так как при переходе от одного базиса к другому, так же как и при обратном переходе, дивизор не уменьшается.

Пусть M — A-подмодуль ранга m модуля A^n. Наибольший общий дивизор всех k-векторов из $\Lambda^k(M)$ обозначим через $d_k(M)$ ($k = 1, \ldots, m$). Ясно, что $d_k(M) \mid d_{k+1}(M)$, поэтому $e_{k+1}(M) = d_{k+1}(M)/d_k(M)$ — целый дивизор ($e_1(M)$ считаем равным $d_1(M)$). Если M — свободный A-модуль с образующими $x_i = (x_{i1}, \ldots, x_{in})$, $i = 1, \ldots, m$, и A — факториальное кольцо, то введенные $d_k(M)$ и $e_k(M)$ превращаются в обычные элементарные делители и инвариантные факторы матрицы (x_{ij}) соответственно. Заметим, что так как для любого простого идеала $\mathfrak{p} \subset A$ высоты 1 $A_\mathfrak{p}$ является кольцом главных идеалов, в котором $e_{k+1}(M)$ делится на $e_k(M)$, то $\mathfrak{p}$-компоненты $e_{k+1}(M)$ делятся на $\mathfrak{p}$-компоненты $e_k(M)$, откуда $e_{k+1}(M)$ кратно $e_k(M)$ и в самом кольце A.

Пусть M — конечнопорожденный A-модуль без кручения. Несколько отступая от общепринятого, назовем M рефлексивным, если $M = \bigcap_{\text{выс.}\mathfrak{p}=1} M_\mathfrak{p}$.

Предложение. *Если M^* — конечнопорожденный A-модуль, то следующие условия эквивалентны:*

a) $M = M^{**}$,
b) $M = \bigcap_{\text{выс.}\mathfrak{p}=1} M_{\mathfrak{p}}$.

Доказательство. Считая M подмодулем QM (Q — поле частных A), отождествим M с подмодулем модуля $\mathrm{Hom}_Q(QM, Q)$, состоящим из таких гомоморфизмов $f: QM \to Q$, для которых $f(M) \subset A$. Так как M конечнопорожден, $(M^*)_{\mathfrak{p}}$ можно отождествить с $(M_{\mathfrak{p}})^*$: если $f/q \in (M^*)_{\mathfrak{p}}$, т. е. $f: QM \to Q, f(M) \subset A$ и $q \in A \setminus \mathfrak{p}$, то, положив $f/q\,(m/q_1) = f(m)/qq_1$, получим —отображение QM в Q, переводящее $M_{\mathfrak{p}}$ в $A_{\mathfrak{p}}$. Если $g \in (M_{\mathfrak{p}})^*$, $m_1, \ldots, m_s$ образующие M над A и $g(m_i) = a_i/r_i$ ($a_i \in A, r_i \in A \setminus \mathfrak{p}$, $1 \leqslant i \leqslant s$), то $f = r_1 \ldots r_s g$, отображая QM в Q, переводит M в A; таким образом, $g \in (M^*)_{\mathfrak{p}}$.

Далее, из того, что $A = \bigcap_{\text{выс. } \mathfrak{p}=1} A_{\mathfrak{p}}$, следует, что $M^* = \bigcap_{\text{выс.}\mathfrak{p}=1} M^*_{\mathfrak{p}}$.

Теперь, пользуясь конечнопорожденностью M^*, подставим в предыдущее равенство $M^{**} = \bigcap_{\text{выс.}\mathfrak{p}=1} M^{**}_{\mathfrak{p}}$. Так как $M_{\mathfrak{p}}$ — свободный $A_{\mathfrak{p}}$-модуль, то $M^{**}_{\mathfrak{p}} = M_{\mathfrak{p}}$. Таким образом, $M^{**} = \bigcap_{\text{выс.}\mathfrak{p}=1} M_{\mathfrak{p}}$ для любого конечнопорожденного A-модуля M без кручения, для которого M^* конечнопорожден. Предложение становится очевидным.

Пусть M — A-подмодуль ранга m A-модуля A^n. Тогда $M : \widetilde{M}$ является идеалом кольца A, который мы назовем кондуктором и обозначим через $\mathrm{Con}(M)$.

Лемма 1.1. *Пусть A — кольцо Крулля и M — рефлексивный A-модуль ранга m. Тогда $\mathrm{Con}(M)$ является дивизориальным идеалом кольца A, и его дивизор равен $e_m(M)$.*

Доказательство. Покажем, что любой элемент кондуктора делится на $e_m(M)$. Достаточно проверить это в локализации по любому простому идеалу $\mathfrak{p} \subset A$ высоты 1. Из сказанного выше следует, что $\mathrm{Con}(M)_{\mathfrak{p}} \subset \mathrm{Con}(M_{\mathfrak{p}})$. Так как $A_{\mathfrak{p}}$ — кольцо главных идеалов и M — подмодуль модуля A^n, то существует базис $z_1, \ldots, z_n$ свободного $A_{\mathfrak{p}}$-модуля $A^n_{\mathfrak{p}}$ такой, что $e_1(M_{\mathfrak{p}})\, z_1, \ldots, e_m(M_{\mathfrak{p}})\, z_m$ — базис $M_{\mathfrak{p}}$ и $z_1, \ldots, z_m$ — базис $\widetilde{M}_{\mathfrak{p}}$. Отсюда ясно, что $\mathrm{Con}(M_{\mathfrak{p}}) \subset e_m(M_{\mathfrak{p}})\, A_{\mathfrak{p}} = e_m(M)_{\mathfrak{p}} A_{\mathfrak{p}}$ для любого простого $\mathfrak{p}$ высоты 1, т. е. $\alpha \subset \mathrm{Con}(M) \Rightarrow e_m(M) \mid \alpha$.

Обратно, пусть $\alpha \in A$ и α делится на $e_m(M)$. В локализации по простому идеалу $\mathfrak{p}$ высоты 1, как видно из предыдущего, $\alpha\widetilde{M} \subset \alpha\widetilde{M}_{\mathfrak{p}} \subset M_{\mathfrak{p}}$. В силу рефлексивности M имеем $\alpha\widetilde{M} \subset M$, т. е. $\alpha \in \mathrm{Con}(M)$. Лемма доказана.

Следствие. *Пусть A — кольцо Крулля и M — рефлексивный подмодуль ранга m модуля A^n. Подмодуль M замкнут тогда и только тогда, когда $e_m(M) = d_m(M) = 1$*

Введем следующее

Определение. Подмодуль M модуля A^n называется коциклическим, если для любого простого идеала $\mathfrak{p} \subset A$ высоты 1 модуль кручения фактормодуля $(A^n/M)_\mathfrak{p}$ является циклическим $A_\mathfrak{p}$-модулем.

Пусть ранг $M = m$. Тогда M коциклический тогда и только тогда, когда $d_m(M) = e_m(M)$. Действительно, кручение модуля $A^n_\mathfrak{p}/M_\mathfrak{p}$ изоморфно прямой сумме циклических модулей $A_\mathfrak{p}/A_\mathfrak{p}e_i(M_\mathfrak{p})$ $(i=1, \ldots, m)$, поэтому, если M коциклический, то все $e_i(M_\mathfrak{p})$, кроме, может быть, одного, равны 1. Так как $e_{i+1}(M_\mathfrak{p})$ делится на $e_i(M_\mathfrak{p})$, то $e_1(M_\mathfrak{p}) = \ldots = e_{m-1}(M_\mathfrak{p}) = 1$, откуда $e_m(M_\mathfrak{p}) = d_m(M_\mathfrak{p})$ для любого простого идеала $\mathfrak{p}$ высоты 1. Значит, $e_m(M) = d_m(M)$.

Обратно, если $d_{m-1}(M) = \ldots = d_1(M) = e_{m-1}(M) = \ldots = e_1(M) = 1$, то модуль кручения модуля $A^n_\mathfrak{p}/M_\mathfrak{p}$ изоморфен $A_\mathfrak{p}/A_\mathfrak{p}e_m(M_\mathfrak{p})$ и M коциклический.

Заметим, что если в M существует свободный замкнутый подмодуль ранга $m-1$, то M коциклический. В самом деле, пусть $F = \{x_1, \ldots, x_{m-1}\} \subset M$ замкнут и свободен. Тогда $d_{m-1}(F) = \operatorname{div}(x_1 \wedge \ldots \wedge x_{m-1}) = 1$ в силу следствия из леммы 1, а из того, что $d_{m-1}(M)$ делит $d_{m-1}(F)$, следует, что $d_{m-1}(M) = 1$.

Пусть $\omega \in \Lambda^m(A^n)$. Будем говорить, что $\operatorname{div}\omega$ свободен от квадратов, если в разложении $\operatorname{div}\omega$ на простые множители каждый из них встречается только в первой степени.

Теорема 1. *Пусть A — кольцо Крулля, $\omega \in \Lambda^m(A^n)$, $2 \leqslant m < n$, и $\operatorname{div}\omega$ свободен от квадратов. Тогда для разложимости ω необходимо и достаточно существование коциклического свободного A-модуля $F \subset K_\omega$ ранга m, такого, что* $\operatorname{div}\operatorname{Con}(F) = \operatorname{div}\omega$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\omega = x_1 \wedge \ldots \wedge x_m$ $(x_i \in A^n)$ и $F = Ax_1 \oplus \ldots \oplus Ax_m \subset K_\omega$. Тогда $\operatorname{div}\omega = d_m(F) = e_m(F) \ldots e_1(F)$. Так как $e_k(F) \mid e_{k+1}(F)$, то $e_{k+1}(F) = e_k(F)e'_{k+1}$ $(k = 1, \ldots, m-1)$, где e'_{k+1} — целые дивизоры. Теперь $d_m(F) = e_1(F)^m e_2'^{m-1} \ldots e_{m-1}'^2 e'_m$, а так как $\operatorname{div}\omega = d_m(F)$ свободен от квадратов, то $e_1(F) = e'_2 = \ldots = e'_{m-1} = 1$ и $e'_m = e_m(M) = d_m(M)$, т. е. F коциклический.

Достаточность. Пусть $F \subset K_\omega$ — свободный коциклический A-модуль с базой $x_1, \ldots, x_m$. Рассмотрим $\omega' = x_1 \wedge \ldots \wedge x_m$. Существуют α и β из A такие, что $\alpha\omega = \beta\omega'$. Так как F коциклический, то $\operatorname{div}\omega' = d_m(F) = e_m(F) = \operatorname{div}\omega$. Отсюда $\operatorname{div}\alpha = \operatorname{div}\beta$ и $\beta = \varepsilon\alpha$, где ε — обратимый элемент кольца A. Следовательно, $\omega = \varepsilon\omega' = \varepsilon x_1 \wedge \ldots \wedge x_m$.

Замечание. Легко проверить, что $\widetilde{F} = K_\omega$, поэтому $\operatorname{Con}(F) = F{:}\widetilde{F} = F{:}K_\omega$.

Для формулировки теоремы 2 введем следующее

Обозначение. Через $\operatorname{id}\omega$ обозначим идеал кольца A, порожденный координатами ω в каком-либо базисе. Понятно, что $\operatorname{id}\omega$ не зависит от выбора базиса.

Теорема 2. *Пусть A — произвольная область, $\omega \in \Lambda^m(A^n)$ и $\mathrm{id}\,\omega = A$. Тогда для разложимости ω необходимо и достаточно, чтобы K_ω был свободным A-модулем ранга m.*

Доказательство. Достаточность доказана в работе [4]. Докажем необходимость. Пусть $\omega = x_1 \wedge \ldots \wedge x_m$, $F = \{x_1, \ldots, x_m\}$ и $y \in K_\omega$ — произвольный элемент. Существуют $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ из A такие, что $\alpha y = \alpha x_1 + \ldots + \alpha_m x_m$. Отсюда

$$\alpha y \wedge x_1 \wedge \ldots \wedge \hat{x}_k \wedge \ldots \wedge x_m = (-1)^k \alpha_k x_1 \wedge \ldots \wedge x_m \quad (k = 1, \ldots, m).$$

Если обозначить через I_k идеал, порожденный координатами m-вектора $y \wedge x_1 \wedge \ldots \wedge \hat{x}_k \wedge \ldots \wedge x_m$, то $\alpha I_k = \alpha_k \,\mathrm{id}\,\omega = \alpha_k A$. Поэтому α_k делится на α для всех $k = 1, \ldots, m$, откуда $y \in F$ и K_ω — свободный A-модуль ранга m.

Теорема 3. *Пусть A — кольцо, $\omega \in \Lambda^m(A^n)$ и K_ω изоморфен прямой сумме свободного A-модуля ранга $m-1$ и идеала кольца A. Если выполнено одно из следующих условий:*

a) *A — произвольное кольцо и I — проективный идеал,*

b) *I — произвольный идеал и A — кольцо Крулля,*

то m-вектор ω разложим.

Доказательство. Существуют $y \in Q^n$ и свободный A-модуль F ранга $m-1$ такие, что $K_\omega = F \oplus Iy$, где I — идеал кольца A. Если $x_1, \ldots, x_{m-1}$ — база F, то $x_1 \wedge \ldots \wedge x_{m-1} y = \frac{\alpha}{\beta}\omega$ для некоторых α, β из A. Покажем, что $\beta/\alpha \in A$. Достаточно проверить, что $\beta/\alpha \in A_\mathfrak{p}$ для любого простого идеала $\mathfrak{p} \subset A$, причем в случае b) можно рассматривать лишь простые идеалы высоты 1. Очевидно, $A_\mathfrak{p} K_\omega = A_\mathfrak{p} x_1 \oplus A_\mathfrak{p} x_2 \oplus \ldots \oplus A_\mathfrak{p} x_{m-1} \oplus I_\mathfrak{p} y$. В случае a) $I_\mathfrak{p}$ — главный идеал в $A_\mathfrak{p}$ как проективный модуль над локальным кольцом $A_\mathfrak{p}$, а в случае b) как модуль без кручения над кольцом главных идеалов. Поэтому в обоих случаях $I_\mathfrak{p} = b_\mathfrak{p} A_\mathfrak{p}$ для некоторого $b_\mathfrak{p} \in A_\mathfrak{p}$ и $A_\mathfrak{p} K_\omega$ — свободный $A_\mathfrak{p}$-модуль, порожденный $x_1, \ldots, x_{m-1}, b_\mathfrak{p} y$. Тогда, как доказано в [4], существует $r_\mathfrak{p} \in A_\mathfrak{p}$ такой, что $\omega = r_\mathfrak{p} x_1 \wedge \ldots \wedge x_{m-1} \wedge b_\mathfrak{p} y$, откуда $\beta/\alpha = r_\mathfrak{p} b_\mathfrak{p} \in A_\mathfrak{p}$, т. е. $\beta/\alpha \in A$ и $\omega = \frac{\beta}{\alpha} x_1 \wedge \ldots \wedge x_{m-1} \wedge y$, что и требовалось.

§ 2

В этом параграфе A — факториальное кольцо, A^* — его мультипликативная полугруппа и $\omega = \Lambda^m(A^n)$ $(2 \leqslant m < n)$. Скажем, что ω коциклически разложим, если существует такое разложение $\omega = x_1 \wedge \ldots \wedge x_m$ $(x_i \in A^n)$, что $F = \{x_1, \ldots, x_m\}$ — коциклический A-модуль.

Всюду в этом параграфе $\mathrm{div}\,\omega = 1$.

Мы будем рассматривать $\mathfrak{F}_\omega = \{a \in A^*: a\omega \text{ разложим}\}$ и $\mathfrak{J}_\omega = \{a \in A^*: a\omega$ коциклически разложим$\}$. Известно, что $\mathfrak{F}_\omega$ непусто (см. [4]); ясно,

что $\mathcal{J}_\omega \subset \mathcal{F}_\omega \subset A^*$ и что $\mathcal{F}_\omega$ — идеал мультипликативной полугруппы A^*.

Лемма 1.2. *Если* $\mathcal{J}_\omega \neq \varnothing$, *то* $\mathcal{J}_\omega$ — *идеал полугруппы* A^*.

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать, что $\mathcal{J}_\omega$ замкнуто относительно умножения на простые элементы A.

Пусть $g \in \mathcal{J}_\omega$, т. е. $g\omega = x_1 \wedge \ldots \wedge x_m$ и $F = \{x_1, \ldots, x_m\}$ коциклический; пусть p — простой элемент A. Существует номер i такой, что $x_1 \wedge \ldots \wedge \hat{x}_i \wedge \ldots \wedge x_m$ не делится на p, так как иначе $d_{m-1}(F) \neq 1$. Рассмотрим $F' = \{x_1, \ldots, x_{i-1}, px_i, x_{i+1}, \ldots, x_m\}$. Очевидно, $F' \subset K_\omega$ и $d_m(F') = pd_m(F) = pg$. Если $d_{m-1}(F') \neq 1$, то $d_{m-1}(F')$ делится на p, что невозможно ввиду выбора номера i. Таким образом, F' коциклический и $pg \in \mathcal{J}_\omega$.

Если $\mathcal{P}$ — множество элементов A, разложение которых на простые множители свободно от квадратов, то, по теореме 1, $\mathcal{F}_\omega \cap \mathcal{P} = \mathcal{J}_\omega \cap \mathcal{P}$; более того, не только для любого $a \in \mathcal{F}_\omega \cap \mathcal{P}$ существует коциклическое разложение m-вектора $a\omega$, но любое разложение $a\omega$ коциклично.

Последнее утверждение, как показывает следующая теорема, при некоторых условиях на A верно и для мультипликативных образующих идеала $\mathcal{F}_\omega$ (мы рассматриваем минимальную систему образующих $\mathcal{F}_\omega$; она состоит из элементов $a \in \mathcal{F}_\omega$ таких, что никакой строгий делитель a в A не лежит в $\mathcal{F}_\omega$).

Теорема 4. *Пусть* A — *факториальное кольцо, для которого любой* $(m-1)$-*вектор из* $\Lambda^{m-1}(A^n)$, *удовлетворяющий условию Плюккера, разложим. Пусть* $\omega \in \Lambda^m(A^n)$. *Тогда* $\mathcal{F}_\omega = \mathcal{J}_\omega$, *причем если* a — *один из минимальных образующих* $\mathcal{F}_\omega$ *в* A^*, *то любое разложение* $a\omega$ *коциклическое.*

Доказательство. В силу леммы 1.2 достаточно доказать последнюю часть утверждения теоремы: если a — элемент нашей системы образующих и $a\omega = x_1 \wedge \ldots \wedge x_m$ $(x_i \in A^n)$, то $F = \{x_1, \ldots, x_m\}$ коциклический.

Так как $d_{m-1}(F)$ делит $\operatorname{div}(x_1 \wedge \ldots \wedge x_{m-1})$, то $\dfrac{x_1 \wedge \ldots \wedge x_{m-1}}{d_{m-1}(F)} \in \Lambda^{m-1}(A^n)$. По условию каждый $(m-1)$-вектор из $\Lambda^{m-1}(A^n)$, удовлетворяющий условию Плюккера, разложим, поэтому $\dfrac{x_1 \wedge \ldots \wedge x_{m-1}}{d_{m-1}(F)} = y_1 \wedge \ldots \wedge y_{m-1}$ для некоторых $y_1, \ldots, y_{m-1}$ из A^n. Так как $a = d_m(F)$, то $e_m(F) = a/d_{m-1}(F)$ и $e_m(F)\omega = y_1 \wedge \ldots \wedge y_{m-1} \wedge x_m$, что при $d_{m-1}(F) \neq 1$ противоречит минимальности выбора a.

Следствие. *Пусть* A — *факториальное кольцо и* ω — *произвольный* 2-*вектор из* $\Lambda^2(A^n)$. *Тогда для разложимости* ω *необходимо и достаточно существование коциклического свободного* A-*модуля* F *ранга* 2, *для которого* $\operatorname{Con}(F) = (\operatorname{div}\omega)A$.

Для доказательства достаточно заметить, что 1-векторы из $\Lambda^1(A^n) = A^n$ разложимы, и воспользоваться леммой 1.1.

Таким образом, мы видим, что в произвольном факториальном кольце минимальная разложимость 2-векторов обязательно является коци-

клической. ($a\omega$ минимально разложим, если $a'\omega$ неразложим для любого строгого делителя a' элемента a.)

Покажем, что это, вообще говоря, неверно для m-векторов при $m\geqslant 3$. Сделаем два предварительных замечания.

Замечание 1. Пусть A — произвольное кольцо и ω — произвольный $(m-1)$-вектор из $\Lambda^{m-1}(A^m)$, $\omega=\sum\limits_{i=1}^{m} a_i e_1\wedge\ldots\wedge\hat{e}_i\wedge\ldots\wedge e_m$. Тогда K_ω совпадает с модулем соотношений последовательности $a_1, -a_2, \ldots, (-1)^{m+1}a_m$, так как

$$\left\{x=\sum_1^m x_ie_i\colon x\wedge\omega=0\right\}=\left\{x=\sum_1^m x_ie_i\colon \sum_1^m(-1)^{i+1}x_ia_ie_1\wedge\ldots\wedge e_m=0\right\}=$$

$$=\left\{x\in A^n\colon \sum_1^m(-1)^{i+1}x_ia_i=0\right\}.$$

Замечание 2. Пусть $a_1, \ldots, a_m$ — A-последовательность, т. е. a_i не является делителем нуля по модулю $I(a_{i+1}, \ldots, a_m)$, $1\leqslant i\leqslant m$, и $I(a_1, \ldots, a_m)=\mathrm{id}\,\omega\neq A$. Тогда $o_{ij}=(-1)^{i+j+1}a_je_i+a_ie_j$ лежат в K_ω (e_i — образующие A^m, $\omega=\sum\limits_{i=1}^{m} a_ie_1\wedge\ldots\wedge\hat{e}_i\wedge\ldots\wedge e_m$, $i, j=1, \ldots, m$) и K_ω порождается элементами o_{ij}.

Действительно, пусть $k\in K_\omega$ и $k=\sum\limits_{i=1}^{m} k_ie_i$. Так как $a_1, \ldots, a_m$ — A-последовательность, то из равенства $k_1a_1-k_2a_2+\ldots+(-1)^{m+1}k_ma_m=0$ вытекает, что $k_1=\sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_{1i}a_i$ ($\alpha_{1i}\in A$). Теперь $k_1a_1-k_2a_2+\ldots+(-1)^{m+1}k_ma_m=$ $=(\alpha_{12}a_2+\ldots+\alpha_{1m}a_m)+\ldots+(-1)^{m+1}k_ma_m=(\alpha_{12}a_1-k_2)a_2+\ldots+$ $+(\alpha_{1m}+(-1)^{m+1}k_m)a_m=0$. Отсюда $k_2=\alpha_{12}a_1-\sum\limits_{i=3}^{m}\alpha_{2i}a_i$ ($\alpha_{2i}\in A$). Подставляя это выражение в предыдущее равенство, получим, что $k_3=-\alpha_{23}a_2-\alpha_{13}a_1+$ $+\sum\limits_{i=4}^{m}\alpha_{3i}a_i$, и т. д. Вообще $k_i=(-1)^i\left(\alpha_{i-1,i}a_{i-1}+\alpha_{i-2,i}a_{i-2}+\ldots+\alpha_{1i}a_1-\right.$ $\left.-\sum\limits_{i<j\leqslant m}\alpha_{ij}a_j\right)$. Теперь нетрудно проверить, что $k=(k_1, \ldots, k_m)$ является линейной комбинацией o_{ij}.

Для дальнейшего нам достаточно утверждения, что если $k=(k_1, \ldots, k_m)\in K_\omega$, то $k_i\in\mathrm{id}\,\omega=I(a_1, \ldots, a_m)$.

Пусть A — факториальное кольцо и $a_1, \ldots, a_m$ — A-последовательность, причем $m\geqslant 4$ и a_1 — простой элемент. Рассмотрим $\omega=\sum\limits_{i=1}^{m} a_ie_1\wedge\ldots$

$\dots \wedge \hat{e}_i \wedge \dots \wedge e_m$. В силу выбора $a_1, \dots, a_m$ имеем $\operatorname{div}\omega = 1$. Если $y_i = (-1)^i a_{i+1} e_i + a_1 e_{i+1}$ $(i = 1, \dots, m-1)$, то $y_1 \wedge \dots \wedge y_{m-1} = a_1^{m-2}\omega$, причем $d_{m-1}(F) = a_1^{m-2}$, $d_{m-2}(F) = a_1^{m-3}$ для $F = \{y_1, \dots, y_{m-1}\}$. Таким образом, разложимость $a_1^{m-2}\omega$ реализуется некоциклическим свободным модулем. Покажем, что эта разложимость тем не менее минимальна.

Пусть это не так, т. е. $a_1^k\omega = x_1 \wedge \dots \wedge x_{m-1}$ $(0 \leqslant k < m-2,\ x_i \in A^m)$. Из замечания 2 следует, что если $x_i = (x_{i1}, \dots, x_{im})$, то $x_{ij} \in \operatorname{id}\omega$. Поэтому все координаты $a_1^k\omega$ лежат в $(\operatorname{id}\omega)^{m-1}$. В частности, $a_1^{k+1} \in (\operatorname{id}\omega)^{m-1}$. Так как $(\operatorname{id}\omega)^{m-1} \subset Aa_1^{m-1} + I(a_2, \dots, a_m)$, то $a_1^{k+1} = \alpha_1 a_1^{m-1} + b$ $(b \in I(a_2, \dots, a_m))$. Отсюда $a_1^{k+1}(1 - \alpha_1 a_1^{m-2-k}) \in I(a_2, \dots, a_m)$, и в силу того, что $a_1, \dots, a_m$ — A-последовательность, $1 - \alpha_1 a_1^{m-2-k} \in I(a_2, \dots, a_m)$, т. е. $\operatorname{id}\omega \ni 1$. Так как это противоречит выбору $a_1, \dots, a_m$, то $a_1^k\omega$ неразложим при $k < m-2$, и данная некоциклическая разложимость $a_1^{m-2}\omega$ минимальна.

В заключение этой темы сделаем одно замечание относительно непустоты $\mathcal{Y}_\omega$. Мы установили, что $\mathcal{Y}_\omega$ непусто в следующих случаях: a) $\omega \in \Lambda^2(A^n)$ $(n > 2$ — любое); b) $\omega \in \Lambda^m(A^n)$ $(2 \leqslant m < n$ любые) и $\mathcal{F}_\omega \cap \mathcal{P} \neq \varnothing$.

Предложение. *Если* $\omega \in \Lambda^3(A^4)$, *то* $\mathcal{Y}_\omega \neq \varnothing$.

Доказательство. Пусть e_1, e_2, e_3, e_4 — образующие A^4 и $\omega = a_1 e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 + a_2 e_1 \wedge e_3 \wedge e_4 + a_3 e_1 \wedge e_2 \wedge e_4 + a_4 e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$ (напомним, что в этом параграфе $\operatorname{div}\omega = 1$ везде, кроме следствия из теоремы 4). Положим $x_1 = a_4 e_3 + a_3 e_4$, $x_2 = a_4 e_1 + a_3 e_2 + a_2 e_3 + a_1 e_4$, $x_3 = a_2 e_1 + a_1 e_2$. Легко проверяется, что $x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 = (a_1 a_4 - a_2 a_3)\omega$. Поэтому в состав координат $x_1 \wedge x_2$, $x_2 \wedge x_3$ входят a_1^2, a_2^2, a_3^2 и a_4^2. Так как н.о.д. $(a_1, a_2, a_3, a_4) =$ н.о.д. $(a_1^2, a_2^2, a_3^2, a_4^2) = \operatorname{div}\omega = 1$, то $d_2(\{x_1, x_2, x_3\}) = 1$, и разложение $(a_1 a_4 - a_2 a_3)\omega = x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$ коциклическое.

§ 3

В этом параграфе мы исследуем $m \times n$-плюккеровы кольца, т. е. кольца, в которых каждый m-вектор из $\Lambda^m(A^n)$, удовлетворяющий условию Плюккера, разложим.

Предложение. *$m \times n$-плюккерово кольцо является $m \times k$-плюккеровым для любого k, $m < k \leqslant n$.*

Доказательство. Пусть $e_i = (\underbrace{0 \dots 0}_{i} 1 \overbrace{0 \dots 0}^{k})$ — базис A^k $(i = 1, \dots, k)$ и $e'_j = (\underbrace{0 \dots 0}_{i} 1 \overbrace{0 \dots 0}^{n})$ — базис A^n $(j = 1, \dots, n)$.

Пусть $\omega = \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_m \leqslant k} a_{i_1 \dots i_m} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_m} \in \Lambda^m(A^k)$ и ω удовлетворяет условию Плюккера. Тогда $\omega' = \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_m \leqslant k} a_{i_1 \dots i_m} e'_{i_1} \wedge \dots \wedge e'_{i_m} \in \Lambda^m(A^n)$ и тоже удовлетворяет условию Плюккера. Так как по условию $\omega = (x_{11} e'_1 + \dots +$

$+x_{1n}e_n') \wedge \ldots \wedge (x_{m1}e_1' + \ldots + x_{mn}e_n')$ для некоторых $x_{ij} \in A$, то легко проверить, что $\omega = (x_{11}e_1 + \ldots + x_{1k}e_k) \wedge \ldots \wedge (x_{m1}e_1 + \ldots + x_{mk}e_k)$.

Лемма 1.3. *Если A — факториальное кольцо, то любой замкнутый A-модуль ранга 1 свободен.*

Доказательство. Пусть $M = \widetilde{M} \subset A^n$ и ранг $M = 1$. Выберем $z = (z_1, \ldots, z_m) \in M$ так, чтобы н.о.д. $(z_1, \ldots, z_m) = 1$ (возможность такого выбора вытекает из факториальности A и замкнутости M). Так как ранг M равен 1, то для любого $x \in M$ существуют α и β из A такие, что $\alpha x = \beta z$. В силу того, что н.о.д. $(z_1, \ldots, z_m) = 1$, β делится на α и $x = \frac{\beta}{\alpha} z$, т. е. $M = Az$, что и требовалось.

Теорема 5. *Пусть A — нётерова область. Следующие условия эквивалентны:*

1) *A — факториальное плюккерово кольцо,*

2) *все замкнутые A-модули свободны,*

3) *все замкнутые A-модули ранга, не меньшего 2, свободны.*

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). В силу §1 каждый замкнутый A-модуль ранга, не меньшего 2, имеет вид K_ω для некоторого $\omega \in \Lambda^m(A^n)$ $(2 \leqslant m < n)$, причем в силу факториальности кольца ω можно выбрать с $\operatorname{div} \omega = 1$. Тогда из теоремы 1 следует, что K_ω свободен. Свобода замкнутых модулей ранга 1 доказана в лемме 2.

Импликация 2) $\Rightarrow$ 3) очевидна.

3) $\Rightarrow$ 1). Покажем вначале, что A факториально. В силу нётеровости A достаточно показать, что для любых двух элементов a и b из A $aA \cap bA$ — главный идеал. Пусть e_1, e_2, e_3 — образующие A^3 и $\omega = ae_2 \wedge e_3 + be_1 \wedge e_3 \in \Lambda^2(A^3)$. Тогда $K_\omega = \{x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 : x_1a_1 - x_2b = 0\} \cong K_{\omega'} \oplus A$, где $\omega' = ae_1 + be_2 \in A^2 = \Lambda^1(A^2)$. Если мы покажем, что $K_{\omega'}$ свободен, то факториальность A будет доказана.

Докажем следующее утверждение: *если P — A-модуль и $P \oplus A = A^2$, то $P \cong A$.* Пусть e_1, e_2 — образующие A^2 и $p_1 + a_1$, $p_2 + a_2$ — соответствующие им образующие $P \oplus A$. Существуют α_1 и α_2 из A такие, что $\alpha_1(p_1 + a_1) + \alpha_2(p_2 + a_2) = 1$, т. е. $\alpha_1a_1 + \alpha_2a_2 = 1$ и $\alpha_1p_1 + \alpha_2p_2 = 0$.

Обозначим $-a_2(p_1 + a_1) + a_1(p_2 + a_2)$ через p и покажем, что p и 1 являются образующими $P \oplus A$. Для этого достаточно проверить, что матрица перехода $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix}$ обратима. Но $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ -a_2 & a_1 \end{vmatrix} = 1$, поэтому p, 1 — образующие $P \oplus A$, и P, следовательно, — свободный A-модуль. Теперь, когда факториальность A доказана, плюккеровость A следует из [4].

Предложение. *Пусть A — нётерово двумерное кольцо и все конечнопорожденные проективные A-модули стабильно свободны. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *A является* OP-*кольцом,*

2) *A — плюккерово кольцо.*

Доказательство. Так как по определению плюккерово кольцо

является OP-кольцом, то в доказательстве нуждается лишь обратное утверждение.

Покажем, что все замкнутые A-модули, т. е. модули вида K_ω, свободны. Действительно, из теоремы 2.4 работы [4] следует, что все K_ω проективны и, следовательно, стабильно свободны (т. е. дополняются свободными конечнопорожденными модулями до свободных). В силу того, что кольцо является OP-кольцом, стабильно свободные модули над ним свободны (доказательство этого факта содержится в работах [5], [6]). Теперь из доказанного в [4] следует, что каждый m-вектор ω разложим и A — плюккерово.

Замечание. Пусть A — нётерова область, x — независимая переменная. Имеет место следующее утверждение: *для того, чтобы* $A[x]$ *было* OP-*кольцом, необходимо и достаточно, чтобы* A *было дедекиндовым.*

Достаточность следует из теоремы 1.2 [4]; докажем необходимость. В силу теоремы 2.4 [4] $\dim A[x] \leqslant 2$, значит, $\dim A \leqslant 1$. Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольный максимальный идеал в A. Так как $A_{\mathfrak{M}}[x]$ — OP-кольцо, то по той же теореме идеал $(\mathfrak{M}, x)$ порождается в $A_{\mathfrak{M}}[x]_{(\mathfrak{M}, x)}$ двумя образующими, причем в качестве одной из них можно выбрать x. Следовательно, $\mathfrak{M}$ — главный идеал в $A_{\mathfrak{M}}$ и A — дедекиндово кольцо.

Неверно, что любое нётерово кольцо A с $\mathrm{gl.dim}\, A \leqslant 2$ является плюккеровым. Пусть $A = k[xyz]/(x^2+y^2+z^2-1)k[xyz]$, где k — поле, квадрат которого не содержит -1, а x, y, z — независимые переменные. Доказано [7], что A факториально и модуль соотношений последовательности x, y, z, равный K_ω для $\omega = xe_2 \wedge e_3 - ye_1 \wedge e_3 + ze_1 \wedge e_2$ не свободен (здесь e_1, e_2, e_3 — образующие A^3). Поэтому, в силу теоремы 5, A не плюккерово.

(Поступила в редакцию 23/IV 1970 г.)

Литература

1. А. И. Мальцев, Основы линейной алгебры, Москва, изд-во «Наука», 1970.
2. Н. Бурбаки, Алгебра. Линейная и полилинейная алгебра, Москва, Физматгиз, 1962.
3. D. Lissner, Outer product rings, Trans. Amer. Math. Soc., **116**, N 4 (1965), 526—535.
4. J. Towber, Complete reducibility in exterior algebras over free modules, J. Algebra, **10**, № 3 (1968), 299—309.
5. D. Lissner, Matrices over polinomial rings, Trans. Amer. Math. Soc., **98**, № 2 (1961), 285—305.
6. D. Lissner. OP-rings and Seshardi's theorem, J. Algebra, **5**, № 3 (1967), 362—366.
7. P. Samuel, Anneaux factoriels, Bull. Soc. Math. France, **89** (1961), 155—173.
8. N. Bourbaki, Algebre commutative, Chap. 7, Paris, Hermann, 1965.