ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

Серия математическая

37 (1973), 289—307

УДК 519.4

Г. Б. КЛЕЙНЕР

КРУЛЛЕВЫ *OP*-КОЛЬЦА ПЛЮККЕРОВЫ

В работе доказывается гипотеза Лисснера и Герамиты о том, что нетерово регулярное *OP*-кольцо является плюккеровым.

Пусть A — коммутативное кольцо с 1, U — свободный A-модуль ранга n и $\Lambda^m(U)$ — m-я внешняя степень модуля $U (0<m<n)$. Если $e_1, \ldots, e_n$ — система образующих модуля U, то произвольный m-вектор $\omega\in\Lambda^m(U)$ однозначно записывается в виде

$$\omega = \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_m\leqslant n} a_{i_1\ldots i_m} e_{i_1}\wedge \ldots \wedge e_{i_m},$$

где $a_{i_1\ldots i_m}$ — элементы кольца A, называемые координатами m-вектора относительно базиса $e_1, \ldots, e_n$. Условимся считать, что для любых попарно различных целых чисел $k_1, \ldots, k_m$, $1\leqslant k_i\leqslant n$, $i=1, \ldots, m$, $a_{k_1\ldots k_m} = (-1)^{\nu} a_{k_1'\ldots k_m'}$, где $1\leqslant k_1'<\ldots<k_m'\leqslant n$, — упорядоченная перестановка чисел $k_1, \ldots, k_m$, а ν—четность подстановки $\begin{pmatrix} k_1' & \ldots & k_m' \\ k_1 & \ldots & k_m \end{pmatrix}$; если $k_i = k_j$ для некоторых $1\leqslant i\neq j\leqslant m$, то $a_{k_1\ldots k_m}$ считается равным нулю.

Определение. Если для любых наборов $1\leqslant i_1<\ldots<i_{m-1}\leqslant n$, $1\leqslant j_0<\ldots<j_m\leqslant n$ координаты $a_{i_1\ldots i_m}$ ненулевого m-вектора

$$\omega = \sum_{i_1\ldots i_m} a_{i_1\ldots i_m} e_{i_1}\wedge \ldots \wedge e_{i_m}\in \Lambda^m(U)$$

удовлетворяют равенству

$$\sum_{s=0}^{m} (-1)^s a_{i_1\ldots i_{m-1} j_s} a_{j_0\ldots \hat{j}_s\ldots j_m} = 0,$$

то m-вектор ω называется плюккеровым.

Определение. Кольцо A называется $m\times n$-плюккеровым, если всякий плюккеров m-вектор $\omega\in\Lambda^m(U)$ вполне разложим, т. е. представим в виде $\omega = x_1\wedge\ldots\wedge x_m$, где $x_1, \ldots, x_m\in U$. Кольцо, являющееся $m\times n$-плюккеровым для всех m и n, $1<m<n$, называется плюккеровым. Если кольцо $m\times n$-плюккерово для всех m и $n=m+1$, то оно называется *OP*-кольцом.

Примерами плюккеровых колец являются поля, кольца главных идеалов, дедекиндовы кольца и кольца многочленов от одной переменной над

дедекиндовыми кольцами ([1]). Существуют *OP*-кольца, не являющиеся плюккеровыми, например, кольцо $\mathbf{Z}(\sqrt{d})$, где d — целое число, свободное от квадратов и такое, что $d \equiv 1 \pmod 4$. Действительно, $\mathbf{Z}(\sqrt{d})$ — *OP*-кольцо как гомоморфный образ *OP*-кольца $\mathbf{Z}[x]$. С другой стороны, кольцо $\mathbf{Z}(\sqrt{d})$ не регулярно и потому [([2]), теорема 4.7] не плюккерово.

В работе ([3]) Лисснер и Герамита высказали гипотезу о том, что всякое регулярное (в смысле конечной глобальной размерности) нетерово *OP*-кольцо является плюккеровым. Настоящая статья посвящена доказательству следующей теоремы, из которой вытекает справедливость этого предположения.

ТЕОРЕМА 1. *Для колец Крулля условия OP и плюккеровости эквивалентны.*

Это утверждение было анонсировано в заметке автора ([5]). Однако приведенный там план доказательства опирался на один результат Лисснера и Герамиты ([7]), доказательство которого в общем виде пока не опубликовано. Поэтому здесь приводится доказательство, в котором этот результат не используется, а именно, теорема 1 получается как следствие более общей теоремы 2.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть A — кольцо Крулля, $1<m<k<n$ — целые числа. Предположим, что A является $m\times k$-плюккеровым и $k\times n$-плюккеровым кольцом. Тогда кольцо A $m\times n$-плюккерово.*

Покажем, как теорема 1 выводится из теоремы 2.

Пусть A — *OP*-кольцо, $1<m<n$ — произвольные целые. Индукцией по $n-m$ докажем, что кольцо A $m\times n$-плюккерово. Случай $n-m=1$ в доказательстве не нуждается. Пусть для всех значений разности $n-m$, меньших данного, доказано, что кольцо A $m\times n$-плюккерово. Тогда, в частности, A является $(m+1)\times n$-плюккеровым кольцом. Из обусловленной $m\times(m+1)$-плюккеровости кольца и теоремы 2 следует, что A — $m\times n$-плюккерово кольцо.

Вопрос о соотношении свойств *OP* и плюккеровости для нетеровых целостных колец решается следующим образом.

Следствие 1. *Пусть A — нетерово целостное OP-кольцо. Следующие условия эквивалентны:*

(а) *кольцо A плюккерово,*

(б) *кольцо A целозамкнуто,*

(в) *кольцо A регулярно,*

(г) $\operatorname{gl\,dim} A \leqslant 2$.

Доказательство следствия 1.

(а)$\Rightarrow$(г) — следует из теоремы 4.7 ([2]).

(г)$\Rightarrow$(в), (в)$\Rightarrow$(б) — очевидно.

(б) $\Rightarrow$(а) — следует из теоремы 1.

Следствие 2. *Пусть A — нетерово (возможно, не целостное) кольцо. Если A регулярно и является OP-кольцом, то A плюккерово.*

Доказательство следствия 2. Так как регулярное нетерово кольцо есть прямая сумма конечного числа регулярных нетеровых цело-

стных колец, а свойство быть OP-кольцом переносится с прямой суммы колец на слагаемые, то каждое из них плюккерово ввиду следствия 1. Сумма плюккеровых колец плюккерова.

В ([4]) доказано, что всякое $m\times n$-плюккерово кольцо является $m\times k$-плюккеровым для любого целого $m<k\leqslant n$. Отсюда и из теоремы 2 вытекает

Следствие 3. *Пусть A — кольцо Крулля, являющееся $k\times n$-плюккеровым кольцом $(1<m<k<n)$. Тогда для того чтобы оно было $m\times n$-плюккеровым, необходимо и достаточно, чтобы A было $m\times k$-плюккеровым кольцом.*

В дальнейшем через A обозначается кольцо Крулля (если не оговорено противное), через U — свободный A-модуль ранга n, $D(A)$ обозначает мультипликативную группу дивизоров кольца A. Если $\delta_1, \ldots, \delta_k$ — целые дивизоры, то через $\operatorname{div}\limits_{1\leqslant i\leqslant k}\{\delta_i\} = \operatorname{div}(\delta_1, \ldots, \delta_k)$ обозначается наибольший общий дивизор дивизоров $\delta_1, \ldots, \delta_k$. Аналогично, если $a_1, \ldots, a_k \in A$, то $\operatorname{div}\limits_{1\leqslant i\leqslant k}\{a_i\} = \operatorname{div}(a_1, \ldots, a_k)$ — наибольший дивизор, делящий $\operatorname{div} a_1, \ldots, \operatorname{div} a_k$. Дивизор ненулевого m-вектора

$$\omega = \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_m\leqslant n} a_{i_1\ldots i_m} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_m} \in \Lambda^m(U)$$

определяется как

$$\operatorname*{div}_{1\leqslant i_1<\ldots<i_m\leqslant n}\{a_{i_1\ldots i_m}\}$$

и обозначается через $\operatorname{div}\omega$.

Сделаем теперь несколько общих замечаний. Пусть дан m-вектор $\omega\in\Lambda^m(U)$. Каждому базису $e=\{e_1, \ldots, e_n\}$ в U соответствует представление ω в виде

$$\omega = \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_m\leqslant n} a_{i_1\ldots i_m} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_m}.$$

Обозначим через $N(e)$ последовательность $\{a_{i_1\ldots i_m}\}$ всех координат m-вектора ω. Выделим в $N(e)$ подпоследовательность $N_0(e)$, состоящую из коэффициентов при одночленах $e_{i_1}\wedge\ldots\wedge e_{i_m}$, не содержащих e_n; обозначим через $\overline{N}(e)$ последовательность оставшихся координат.

Этому разбиению множества координат m-вектора соответствует представление ω в виде

$$\omega = \omega_0(e) + \overline{\omega}(e),$$

где

$$\omega_0(e) = \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_m<n} a_{i_1\ldots i_m} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_m}$$

и

$$\overline{\omega}(e) = \sum_{1\leqslant j_1<\ldots<j_{m-1}<n} a_{j_1\ldots j_{m-1}n} e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_{m-1}} \wedge e_n.$$

Пусть $e'=\{e'_1, ..., e'_n\}$ — отличный от e базис в U. Выделим три вида преобразований базисов в U, которые нам понадобятся в дальнейшем. Переход от базиса e к базису e' назовем преобразованием первого рода, если $\omega_0(e')=\omega_0(e)$ как элементы из $\Lambda^m(U)$. Так как сам ω не зависит от выбора базиса в U, то, очевидно, и $\bar{\omega}(e')=\bar{\omega}(e)$ как элементы в $\Lambda^m(U)$.

Ясно, что необходимым и достаточным условием того, чтобы $e\to e'$ было преобразованием первого рода, является следующее: при замене одночленов в $\omega_0(e)$ суммами одночленов в базисе e' ни одно из вновь получившихся слагаемых не должно при последующем разбиении ω на $\omega_0(e')+\bar{\omega}(e')$ перейти в $\bar{\omega}(e')$. Кроме того, ни один из одночленов, возникших при пересчете $\bar{\omega}(e)$, не должен быть отнесен к $\omega_0(e')$. Обозначим через $U'(e)$ свободный подмодуль в U, порожденный элементами $e_1, ..., e_{n-1}$, и рассмотрим базис $e'=\{e'_1, ..., e'_{n-1}, e_n\}$ в U, где $e'_1, ..., e'_{n-1}$ образуют базис в $U'(e)$. Так как $\omega_0(e)$ включает в себя только одночлены, не содержащие e_n, то при переходе от e к e' в полученных из $\omega_0(e)$ одночленах тоже не будет e_n. С другой стороны, преобразуя $\bar{\omega}(e)$, мы видим, что каждый вновь получившийся одночлен будет содержать e_n и потому не сможет войти в $\omega_0(e')$. Таким образом, переход $e\to e'$ является преобразованием первого рода.

Преобразованием второго рода назовем такую замену $e\to e'$ базиса в U, при которой $N_0(e')=N_0(e)$. Таким преобразованием является, в частности замена $e_i=e'_i+x_ie_n$, где $x_i\in A$, $i=1, \ldots, n-1$, $e_n=e'_n$. Действительно, все вновь возникшие при пересчете $\omega_0(e)$ слагаемые будут содержать $e_n=e'_n$ и вольются поэтому в $\bar{\omega}(e')$.

К преобразованиям третьего рода отнесем переходы $e\to e'$, сохраняющие $\bar{N}(e)$, например, $e_1=e'_1, \ldots, e_{n-1}=e'_{n-1}, e_n=e'_n+x_ie'_i$, $1\leqslant i\leqslant n$. При таком преобразовании все одночлены, содержащие e_n, перейдут в одночлены, содержащие e'_n, а одночлены, не содержащие e_n, не смогут перейти в одночлены, содержащие e'_n.

Предложение 1. *Пусть A — бесконечное целостное кольцо, U — свободный модуль ранга $n>m>0$, $\omega\in\Lambda^m(U)$ — ненулевой m-вектор. Тогда в модуле U существует базис, относительно которого все координаты m-вектора ω отличны от нуля.*

Доказательство. Будем вести индукцию по m. Пусть $m=1$, $e_1, ..., e_n$ — некоторый базис в U, $\omega=a_1e_1+...+a_ne_n$, $a_i\in A$, и, скажем, $a_1\neq 0$. Если все $a_i\neq 0$, $1\leqslant i\leqslant n$, то доказывать нечего. Пусть $a_k=0$ для некоторого $1<k\leqslant n$. Покажем, как изменением базиса в U можно уменьшить число нулевых координат вектора ω. Положим $e_1=e'_1+e'_k$, $e_2=e'_2, \ldots, e_n=e'_n$. Тогда $\omega=a_1e'_1+a_2e'_2+\ldots+(a_1+a_k)e'_k+\ldots+a_ne_n$ и число нулевых координат ω стало на единицу меньше. Продолжая этот процесс, не более чем через $n-1$ шаг придем к вектору, у которого все координаты ненулевые.

Пусть, далее, утверждение доказано для значения m, на единицу меньше данного. Докажем его для данного значения m. Предположим,

что

$$0 \neq \omega = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_m \leqslant n} a_{i_1 \ldots i_m} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_m} \in \Lambda^m(U).$$

Тогда

$$\omega_0(e) = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_m < n} a_{i_1 \ldots i_m} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_m},$$

$$\bar{\omega}(e) = \sum_{1 \leqslant j_1 < \ldots < j_{m-1} < n} a_{j_1 \ldots j_{m-1} n} e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_{m-1}} \wedge e_n,$$

причем перенумерацией векторов базиса $e_1, \ldots, e_n$ всегда можно добиться того, чтобы $\bar{\omega}(e) \neq 0$. Будем считать, что это так и есть. Очевидно,

$$\bar{\omega}(e) = \bar{\omega}_1(e) \wedge e_n,$$

где

$$0 \neq \bar{\omega}_1(e) = \sum_{1 \leqslant j_1 < \ldots < j_{m-1} < n} a_{j_1 \ldots j_{m-1} n} e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_{m-1}} \in \Lambda^{m-1}(U'(e)).$$

По индукционному предположению существует базис $u = \{u_1, \ldots, u_{n-1}\}$ в $U'(e)$, относительно которого все координаты $\bar{\omega}_1(e)$ отличны от нуля. Обозначим через e' базис $e' = \{u_1, \ldots, u_{n-1}, e_n\}$ модуля U и запишем m-вектор ω в виде $\omega = \omega_0(e') + \bar{\omega}(e') = \omega_0(e') + \bar{\omega}_1(e') \wedge e_n$. Так как $e \to e'$ есть преобразование первого рода, то $\omega_0(e') = \omega_0(e)$, $\bar{\omega}(e') = \bar{\omega}(e)$, $\bar{\omega}_1(e') = \bar{\omega}_1(e)$. Координаты $\bar{\omega}_1(e')$ относительно e' и относительно u совпадают и все отличны от 0. Таким образом, мы добились того, что все координаты m-вектора в базисе e', содержащие индекс n, отличны от нуля. Покажем теперь, как избавиться от остальных нулевых координат. Будем по-прежнему обозначать координаты m-вектора ω (уже относительно базиса e') через $a_{i_1 \ldots i_m}$. Предположим, что для некоторых $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_m < n$ $a_{i_1 \ldots i_m} = 0$. Рассмотрим новый базис e'' для U, состоящий из векторов $u_1, \ldots, u_{n-1}$ и вектора e''_n, определяемого соотношением $e_n = e''_n + x u_{i_m}$, где x — элемент из кольца A, который мы сейчас подберем. Так как переход $e' \to e''$ является преобразованием третьего рода, то $\bar{N}(e'') = \bar{N}(e')$. При пересчете $\bar{\omega}(e')$ каждый входящий в $\bar{\omega}(e')$ одночлен заменится двумя, один из которых войдет в $\bar{\omega}(e'')$, а другой — в $\omega_0(e'')$. В $N_0(e'')$ будут входить, во-первых, координаты $a_{j_1 \ldots j_m}$, где $j_k \neq i_m$ для всех $k = 1, \ldots, m$. Если же набор $j_1, \ldots, j_m$ содержит i_m, то новые координаты будут иметь вид

$$a'_{j_1 \ldots j_m} = a_{j_1 \ldots i_m \ldots j_m} + (-1)^r x a_{j_1 \ldots \hat{i}_m \ldots j_m n},$$

где r — число индексов из $j_1, \ldots, j_m$, больших, чем i_m. Таким образом, $N(e'')$ состоит из всех элементов, входящих в $\bar{N}(e'')$ (а они ненулевые в силу предыдущего), и элементов $a'_{j_1 \ldots j_m}$, где $1 \leqslant j_1 < \ldots < j_m < n$.

Положим

$$y_{j_1\ldots\hat{i}_m\ldots j_m} = \begin{cases} -\dfrac{a_{j_1\ldots i_m\ldots j_m}}{(-1)^r a_{j_1\ldots\hat{i}_m\ldots j_m n}}, & \text{если эта дробь лежит в } A, \\ 0 \text{ в противном случае} \end{cases}$$

и возьмем $x \in A$, отличный от всех $y_{j_1\ldots\hat{i}_m\ldots j_m}$, $1 \leqslant j_1 < \ldots < j_m < n$, что можно сделать в силу бесконечности кольца A. Легко видеть, что при таком выборе элемента x все координаты вида $a'_{j_1\ldots j_m}$, $1 \leqslant j_1 < \ldots < j_m < n$, содержащие i_m в числе индексов (и, в частности, $a'_{i_1\ldots i_m}$), будут отличны от нуля, в то время как координаты, не содержащие i_m в индексах, не изменятся. Ненулевыми останутся и те координаты m-вектора ω относительно базиса e'', которые содержат в индексе число n. Поступая таким же образом, мы не более чем через $n - m$ шагов придем к ненулевым координатам m-вектора ω.

ЛЕММА 1. *Пусть A — кольцо Крулля, не являющееся полем, $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_k \in A$, причем $b_i \neq 0$ для $i = 1, \ldots, k$, и пусть $\delta \in D(A)$ — целый дивизор. Тогда существует такой элемент $x \in A$, что $a_i + xb_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, k$, и*

$$\operatorname{div}(a_1 + xb_1, \ldots, a_k + xb_k, \delta) = \operatorname{div}(a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_k, \delta).$$

Доказательство. Пусть $\delta = \mathfrak{p}_1^{t_1} \ldots \mathfrak{p}_r^{t_r}$, где $\mathfrak{p}_i \in D^+(A)$ — простые дивизоры, $\mathfrak{p}_i \neq \mathfrak{p}_j$ при $i \neq j$ и $t_i > 0$ $(i = 1, \ldots, r)$. Предположим, что лемма не верна. Так как всегда $\operatorname{div}(a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_k, \delta)$ делит $\operatorname{div}(a_1 + xb_1, \ldots, a_k + xb_k, \delta)$, то наше предположение означает, что для всякого элемента $x \in A$ существует номер $i(x)$, $1 \leqslant i(x) \leqslant r$, и целое число $k_{i(x)}$, $0 \leqslant k_{i(x)} < t_i$, такие, что элементы $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_k$ делятся на $\mathfrak{p}_{i(x)}^{k_i(x)}$ и не делятся все одновременно на $\mathfrak{p}_{i(x)}^{k_{i(x)+1}}$. Перенумеруем сомножители $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ дивизора δ так, чтобы множество значений, принимаемых целочисленной функцией $i(x)$, $x \in A$, совпадало с множеством $\{1, \ldots, r'\}$, где r' — некоторое целое число, не превосходящее r. Теперь любой элемент кольца A является решением одной из r систем сравнений:

$$\begin{array}{ll} a_1 + xb_1 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_1^{k_1+1}} & a_1 + xb_1 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_{r'}^{k_{r'}+1}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_k + xb_k \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_1^{k_1+1}} & a_k + xb_k \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_{r'}^{k_{r'}+1}}. \end{array}$$

Обозначим i-ю систему через S_i и разобьем множество $S_1, \ldots, S_{r'}$ на два класса. К первому классу отнесем системы S_i, содержащие сравнение $a_j + xb_j \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_i^{k_i+1}}$, в котором a_j кратно $\mathfrak{p}_i^{k_i+1}$, а b_j не кратно $\mathfrak{p}_i^{k_i+1}$. Остальные системы зачислим во второй класс и перенумеруем простые сомножители $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_{r'}$ дивизора δ так, чтобы в первом классе оказались системы $S_1, \ldots, S_l$, а во втором — системы $S_{l+1}, \ldots, S_{r'}$.

По определению во второй класс входят системы, в которых каждое сравнение $a_j + xb_j \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_i^{k_i+1}}$ имеет один из двух видов: 1) a_j кратно

$\mathfrak{p}_i^{k_i+1}$, b_j кратно $\mathfrak{p}_i^{k_i+1}$, 2) a_j не кратно $\mathfrak{p}_i^{k_i+1}$ $(l<i\leqslant r',\ 1\leqslant j\leqslant k)$. В силу выбора k_i ни одна из систем $S_1, \ldots, S_{r'}$ не может состоять только из сравнений 1-го вида, так как тогда $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_k$ делились бы на $\mathfrak{p}_i^{k_i+1}$. Поэтому 2-й класс составляет системы, содержащие сравнение, в котором a_j не кратно $\mathfrak{p}_i^{k_i+1}$ $(1\leqslant j\leqslant k,\ l<i\leqslant r)$. По теореме аппроксимации (предложение 9 § 1 ([6])) в кольце Крулля A существует элемент x такой, что $x\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_{l+1}\ldots\mathfrak{p}_r}$, $x\not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_l}$. Этот элемент можно выбрать таким образом, чтобы $a_j+b_jx\neq 0$ для всех $j=1, \ldots, k$: достаточно потребовать, чтобы $x\in A$ был кратен достаточно большой степени простого дивизора $\mathfrak{p}_r$. Легко видеть, что элемент x не может быть решением ни одной системы сравнений как первого, так и второго класса. Полученное противоречие доказывает лемму 1.

Предложение 2. *Пусть A — кольцо Крулля, не являющееся полем, U — свободный A-модуль ранга n и $\omega\in\Lambda^m(U)$ — ненулевой m-вектор $(1<m<n)$. Тогда существует базис $u=\{u_1, \ldots, u_n\}$ модуля U, для которого* $\operatorname{div}\omega=\operatorname{div}\bar{\omega}(u)$.

Доказательство. В силу предложения 1 существует базис $e_1, \ldots, e_n$ модуля U, относительно которого все координаты m-вектора ω отличны от нуля. Пусть

$$\omega=\sum_{i_1\ldots i_m} a_{i_1\ldots i_m}e_{i_1}\wedge\ldots\wedge e_{i_m}=$$

$$=\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_m<n} a_{i_1\ldots i_m}e_{i_1}\wedge\ldots\wedge e_{i_m}+$$

$$+\sum_{1\leqslant j_1<\ldots<j_{m-1}<n} a_{j_1\ldots j_{m-1}n}e_{j_1}\wedge\ldots\wedge e_{j_{m-1}}\wedge e_n=$$

$$=\omega_0(e)+\bar{\omega}(e).$$

Будем последовательно заменять базис в модуле U, переходя от $e^{(i-1)}=\{e_1^{(i-1)}, \ldots, e_n^{(i-1)}\}$ к $e^{(i)}=\{e_1^{(i)}, \ldots, e_n^{(i)}\}$, где $e_1^{(i-1)}=e_1^{(i)}, \ldots, e_{i-1}^{(i-1)}=e_{i-1}^{(i)}$, $e_i^{(i-1)}=e_i^{(i)}+x_ie_n^{(i)}$, $e_{i+1}^{(i-1)}=e_{i+1}^{(i)}, \ldots, e_n^{(i-1)}=e_n^{(i)}$, а элемент $x_i\in A$ будет строиться индуктивно для $i=1, \ldots, n-m$ (под базисом $e^{(0)}$ мы понимаем базис e). Так как каждый переход $e^{(i-1)}\to e^{(i)}$ является преобразованием второго рода, то $N_0(e^{(i)})=N_0(e^{(i-1)})=N_0(e)$.

Определим элемент $x_1\in A$ требованиями: для любого набора $1\leqslant j_1<\ldots<j_{m-1}<n$

1) $$a_{j_1\ldots j_{m-1}n}+x_1a_{j_1\ldots j_{m-1}1}\neq 0.$$

2) $$\operatorname*{div}_{1\leqslant i_1<\ldots<i_{m-1}<n}\{a_{j_1\ldots j_{m-1}n}+x_1a_{j_1\ldots j_{m-1}1}\}=$$

$$=\operatorname*{div}_{1\leqslant j_1<\ldots<j_{m-1}<n}\{a_{j_1\ldots j_{m-1}n},\ a_{j_1\ldots j_{m-1}1}\}.$$

Покажем, что такой $x_1 \in A$ существует. Положим

$$\delta = \operatorname*{div}_{1<j_2<\ldots<j_{m-1}<n} \{a_{1j_2\ldots j_{m-1}n}\};$$

так как все координаты m-вектора ω отличны от нуля, то дивизор δ определен.

Очевидно,

$$\operatorname*{div}_{1\leqslant j_1<\ldots<i_{m-1}<n} \{a_{j_1\ldots i_{m-1}n} + x_1 a_{j_1\ldots i_{m-1}1}\} =$$

$$= \operatorname{div}\Big(\operatorname*{div}_{1=j_1<\ldots<j_{m-1}<n} \{a_{j_1\ldots j_{m-1}n} + x_1 a_{j_1\ldots j_{m-1}1}\},$$

$$\operatorname*{div}_{1<j_1<\ldots<j_{m-1}<n} \{a_{j_1\ldots j_{m-1}n} + x_1 a_{j_1\ldots j_{m-1}1}\}\Big) =$$

$$= \operatorname{div}\Big(\operatorname*{div}_{1<j_2<\ldots<j_{m-1}<n} \{a_{1j_2\ldots j_{m-1}n}\}, \operatorname*{div}_{1<j_1<\ldots<j_{m-1}<n} \{a_{j_1\ldots j_{m-1}n} + x_1 a_{j_1\ldots j_{m-1}1}\}\Big) =$$

$$= \operatorname*{div}_{1<j_1<\ldots<j_{m-1}<n} (\delta, \{a_{j_1\ldots j_{m-1}n} + x_1 a_{j_1\ldots j_{m-1}1}\}).$$

Применяя лемму 1 к дивизору δ и двум наборам элементов $\{a_{j_1\ldots j_{m-1}n}\}$ и $\{a_{j_1\ldots j_{m-1}1}\}$, $1 < j_1 < \ldots < j_{m-1} < n$, получим требуемый элемент $x_1 \in A$.

Сделаем теперь замену базиса $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ базисом $e' = \{e_1 - x_1 e_n, e_2, \ldots, e_n\}$ и обозначим через $a^{(0)}_{i_1\ldots i_m} = a_{i_1\ldots i_m}$ старые координаты m-вектора ω, а через $a^{(1)}_{i_1\ldots i_m}$ — новые. Тогда $a^{(1)}_{i_1\ldots i_m} = a^{(0)}_{i_1\ldots i_m}$ при $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_m < n$ и

$$a^{(1)}_{j_1\ldots j_{m-1}n} = a^{(0)}_{j_1\ldots j_{m-1}n} + x_1 a^{(0)}_{j_1\ldots j_{m-1}1} = a_{j_1\ldots j_{m-1}n} + x_1 a_{j_1\ldots j_{m-1}1} \neq 0$$

для любого набора $1 \leqslant j_1 < \ldots < j_{m-1} < n$.

Перейдем к индукционному шагу. Пусть $x_1, \ldots, x_{i-1}$ построены, произведены соответствующие замены базисов и вычислены $a^{(i-1)}_{i_1\ldots i_m}$, $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_m \leqslant n$.

Определим x_i требованиями: для любого набора $1 \leqslant j_1 < \ldots < j_{m-1} < n$

1) $$a^{(i-1)}_{j_1\ldots j_{m-1}n} + x_i a^{(i-1)}_{j_1\ldots j_{m-1}i} \neq 0,$$

2) $$\operatorname*{div}_{1\leqslant j_1<\ldots<j_{m-1}<n} \{a^{(i-1)}_{j_1\ldots j_{m-1}n} + x_i a^{(i-1)}_{j_1\ldots j_{m-1}i}\} =$$

$$= \operatorname*{div}_{1\leqslant j_1<\ldots<j_{m-1}\leqslant n} \{a^{(i-1)}_{j_1\ldots j_{m-1}n}, a^{(i-1)}_{j_1\ldots j_{m-1}i}\}. \qquad (1)$$

Для доказательства существования элемента x_i заметим, во-первых, что так как все наши изменения базисов — преобразования второго рода, то $a^{(i)}_{i_1\ldots i_m} = a^{(0)}_{i_1\ldots i_m} = a_{i_1\ldots i_m}$ при $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_m < n$. Посмотрим, как преобразуются координаты с индексами, содержащими n. На i-м шаге мы заменяем базис $e^{(i-1)} = \{e^{(i-1)}_1, \ldots, e^{(i-1)}_n\}$ базисом $e^{(i)} = \{e^{(i)}_1, \ldots, e^{(i)}_n\}$, где

$$e^{(i-1)}_j = \begin{cases} e^{(i)}_j & \text{при } j \neq i, \\ e^{(i)}_j + x_i e^{(i-1)}_n & \text{при } j = i. \end{cases}$$

Вместо члена

$$a^{(i-1)}_{i_1\ldots i\ldots i_{m-1}} e^{(i-1)}_{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{(i-1)}_{i_{m-1}}$$

появится сумма

$$a^{(i-1)}_{i_1\ldots i\ldots i_{m-1}} e^{(i-1)}_{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{(i)}_{i} \wedge \ldots \wedge e^{(i-1)}_{i_{m-1}} +$$

$$+ x_i a^{(i-1)}_{i_1\ldots i\ldots i_{m-1}} e^{(i-1)}_{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{(i-1)}_{n} \wedge \ldots \wedge e^{(i-1)}_{i_{m-1}} =$$

$$= a^{(i-1)}_{i_1\ldots i\ldots i_{m-1}} e^{(i)}_{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{(i)}_{i} \wedge \ldots \wedge e^{(i)}_{i_{m-1}} +$$

$$+ x_i a^{(i-1)}_{i_1\ldots i_{m-1}i} e^{(i)}_{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{(i)}_{i_{m-1}} \wedge e^{(i)}_{n}.$$

Поэтому

$$a^{(i)}_{j_1\ldots j_{m-1}n} = a^{(i-1)}_{j_1\ldots j_{m-1}n} + x_i a_{j_1\ldots j_{m-1}i} \tag{2}$$

для всякого набора $1 \leqslant j_1 < \ldots < j_{m-1} < n$ и $i = 1, \ldots, n-1$. В частности, если $i \in \{j_1, \ldots, j_{m-1}\}$, то

$$a^{(i)}_{j_1\ldots j_{m-1}n} = a^{(i-1)}_{j_1\ldots j_{m-1}n}.$$

Так как x_{i-1} определялся из соотношений, аналогичных (1), то по индукционному предположению и формуле (2)

$$a^{(i-1)}_{j_1\ldots j_{m-1}n} = a^{(i-2)}_{j_1\ldots j_{m-1}n} + x_{i-1} a_{j_1\ldots j_{m-1}, i-1} \neq 0 \quad (1 < i < n).$$

Поэтому дивизор

$$\delta = \operatorname*{div}_{\substack{1 \leqslant j_1 < \ldots < j_{m-1} < n \\ i \in \{j_1 \ldots j_{m-1}\}}} \{a^{(i-1)}_{j_1\ldots j_{m-1}n}\}$$

определен и к наборам элементов $\{a_{j_1\ldots j_{m-1}n}\}$ и $\{a_{j_1\ldots j_m i}\}$ $(i \notin \{j_1 \ldots j_{m-1}\})$ можно применить лемму 1, из которой следует существование элемента x_i.

Покажем теперь, что полученный на $(n-m)$-м шаге базис $e^{(n-m)}$ является искомым. Докажем индукцией по i следующую формулу:

$$\operatorname{div}\bar{\omega}(e^{(i)}) = \operatorname{div}(\operatorname{div}\bar{\omega}(e), \operatorname*{div}_{\substack{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_m < n \\ \text{некоторое } i_k \leqslant i}} \{a_{i_1\ldots i_m}\}).$$

Для $i = 1$:

$$\operatorname{div}\bar{\omega}(e^{(1)}) = \operatorname*{div}_{1 \leqslant j_1 < \ldots < j_{m-1} < n} \{a^{(1)}_{j_1\ldots j_{m-1}n}\} =$$

$$= \operatorname*{div}_{1 \leqslant j_1 < \ldots < j_{m-1} < n} \{a^{(0)}_{j_1\ldots j_{m-1}, n} + x_1 a_{j_1\ldots j_{m-1}1}\} =$$

$$= \operatorname*{div}_{1 \leqslant j_1 < \ldots < j_{m-1} < n} \{a_{j_1\ldots j_{m-1}n},\ a_{j_1\ldots j_{m-1}1}\} =$$

$$= \operatorname{div}(\operatorname{div}\bar{\omega}(e), \operatorname*{div}_{1 \leqslant j_1 < \ldots < j_{m-1} < n} \{a_{1 j_1\ldots j_{m-1}}\}).$$

Пусть формула доказана для всех значений i, меньших данного. Тогда

$$\operatorname{div}\bar{\omega}(e^{(i)}) = \operatorname*{div}_{1\leqslant j_1<\ldots<j_{m-1}<n}\{a^{(i)}_{j_1\ldots j_{m-1}n}\} =$$

$$= \operatorname*{div}_{1\leqslant j_1<\ldots<j_{m-1}<n}\{a^{(i-1)}_{j_1\ldots j_{m-1}n} + x_i a_{j_1\ldots j_{m-1}i}\} =$$

$$= \operatorname*{div}_{1\leqslant j_1<\ldots<j_{m-1}<n}\{a^{(i-1)}_{j_1\ldots j_{m-1}n},\ a_{j_1\ldots j_{m-1}i}\} =$$

$$= \operatorname{div}(\operatorname{div}\bar{\omega}(e^{(i-1)}), \operatorname*{div}_{1\leqslant j_1<\ldots<j_{m-1}<n}\{a_{j_1\ldots j_{m-1}i}\}) =$$

$$= \operatorname{div}(\operatorname{div}\bar{\omega}(e), \operatorname*{div}_{\substack{1\leqslant i_1<\ldots<i_m<n\\ \text{некоторое } i_k\leqslant i-1}}\{a_{i_1\ldots i_m}\},$$

$$\operatorname*{div}_{1\leqslant j_1<\ldots<j_{m-1}<n}\{a_{j_1\ldots j_{m-1}i}\}) = \operatorname{div}(\operatorname{div}\bar{\omega}(e), \operatorname*{div}_{\substack{1\leqslant i_1<\ldots<i_m<n\\ \text{некоторое } i_k\leqslant n}}\{a_{i_1\ldots i_m}\}),$$

что и требовалось. В частности, при $i=n-m$ имеем:

$$\operatorname{div}\bar{\omega}(e^{(n-m)}) = \operatorname{div}(\operatorname{div}\bar{\omega}(e), \operatorname*{div}_{\substack{1\leqslant i_1<\ldots<i_m<n\\ \text{некоторое } i_k\leqslant n-m}}\{a_{i_1\ldots i_m}\}).$$

Так как в любом наборе из m попарно различных целых чисел, не меньших 1 и не больших $n-1$, хотя бы одно не превосходит $n-m$, то

$$\operatorname*{div}_{\substack{1\leqslant i_1<\ldots<i_m<n\\ \text{некоторое } i_k\leqslant n-m}}\{a_{i_1\ldots i_m}\} = \operatorname*{div}_{1\leqslant i_1<\ldots<i_m<n}\{a_{i_1\ldots i_m}\} = \operatorname{div}\omega_0(e).$$

Таким образом,

$$\operatorname{div}\bar{\omega}(e^{(n-m)}) = \operatorname{div}(\operatorname{div}\bar{\omega}(e),\ \operatorname{div}\omega_0(e)) = \operatorname{div}\omega,$$

что и доказывает предложение 2.

В дальнейшем мы будем предполагать, что кольцо A не является полем, так как в этом случае доказываемое утверждение тривиально.

Предложение 3. *Пусть A — кольцо Крулля, U — свободный A-модуль ранга n, $0<m<n-1$ и ω — ненулевой m-вектор из $\Lambda^m(U)$. Тогда существует вектор $u\in U$ такой, что $\omega\wedge u\neq 0$ и $\operatorname{div}(\omega\wedge u)=\operatorname{div}\omega$.*

Доказательство. Будем вести индукцию по m. Пусть $m=1$ и $\omega=a_1e_1+\ldots+a_ne_n$, где $e_1, \ldots, e_n$ — базис модуля U, относительно которого $a_i\neq 0$ для $i=1, \ldots, n$. В силу леммы 1 существует элемент $x_1\in A$, для которого $a_2x_1-a_1\neq 0$ и $\operatorname{div}(a_3, a_4, \ldots, a_n, a_2x_1-a_1)=\operatorname{div}(a_3, a_4, \ldots, a_n, a_1, a_2)=\operatorname{div}\omega$. Если теперь положить $u=x_1e_1+e_2$, то $\omega\wedge u\neq 0$ и $\operatorname{div}(\omega\wedge u) = \operatorname{div}((a_1-a_2x_1)e_1\wedge e_2 - a_3x_1e_1\wedge e_3 - \ldots - a_nx_1e_1\wedge e_n - a_3e_2\wedge e_3 - \ldots - a_ne_2\wedge e_n)=\operatorname{div}(a_1-a_2x_1, a_3, a_4, \ldots, a_n)=\operatorname{div}(a_1, a_2, \ldots, a_n)=\operatorname{div}\omega$.

Пусть утверждение доказано для всех значений m, меньших данного, и пусть $0\neq\omega\in\Lambda^m(U)$. В соответствии с предложением 2 выберем базис

$e=\{e_1, \ldots, e_n\}$ в модуле U, для которого $\operatorname{div}\bar{\omega}(e)=\operatorname{div}\omega$. Как мы уже видели, $\bar{\omega}(e)=\bar{\omega}_1(e)\wedge e_n$, где $\bar{\omega}_1(e)\in\Lambda^{m-1}(Ae_1\oplus\ldots\oplus Ae_{n-1})$. (В дальнейшем при доказательстве предложения 3 базис не будет меняться, поэтому индекс e мы будем опускать.) В силу индукционного предположения существует вектор $u'\in U'=Ae_1\oplus\ldots\oplus Ae_{n-1}$, такой, что $\bar{\omega}_1\wedge u'\neq 0$ и $\operatorname{div}(\omega_1\wedge u')=\operatorname{div}\bar{\omega}_1$. Так как множество координат $(m-1)$-вектора $\bar{\omega}_1$ относительно базиса $e_1, \ldots, e_{n-1}$ совпадает с множеством координат m-вектора $\bar{\omega}=\bar{\omega}_1\wedge e_1$ относительно базиса $e_1, \ldots, e_n$, то $\operatorname{div}\bar{\omega}=\operatorname{div}\bar{\omega}_1$, поэтому $\operatorname{div}(\bar{\omega}_1\wedge u')=\operatorname{div}\omega_1=\operatorname{div}\bar{\omega}=\operatorname{div}\omega$ в силу выбора базиса e.

Теперь рассмотрим вектор $u'\in Ae_1\oplus\ldots\oplus Ae_{n-1}$ как элемент модуля U и обозначим его через $u\in U$. Тогда

$$\omega\wedge u=\omega_0\wedge u+\bar{\omega}_1\wedge e_n\wedge u\neq 0.$$

Так как в $\omega_0\wedge u$ не входят одночлены, зависящие от e_n (коэффициент при e_n в векторе u равен нулю), а все одночлены из $\bar{\omega}_1\wedge e_n\wedge u$ содержат e_n, то

$$\operatorname{div}(\omega\wedge u)=\operatorname{div}(\operatorname{div}(\omega_0\wedge u)),$$

$$\operatorname{div}(\bar{\omega}\wedge u)=\operatorname{div}(\operatorname{div}(\omega_0\wedge u), \operatorname{div}\omega)=\operatorname{div}\omega.$$

Последнее равенство вытекает из того, что координаты $(m+1)$-вектора $\omega_0\wedge u$ являются линейными комбинациями координат m-вектора ω_0, следовательно, $\operatorname{div}\omega\,|\operatorname{div}\omega_0\,|\operatorname{div}(\omega_0\wedge u)$.

Предложение 3 доказано.

Обозначим через K_ω A-модуль $K_\omega=\{x\in U\,|\,x\wedge\omega=0\}$.

Предложение 4. *Пусть A — кольцо Крулля, U — свободный A-модуль ранга n и $\omega\in\Lambda^m(U)$ — плюккеров m-вектор $(1<m<n)$. Если $\omega=\omega_1\wedge\ldots\wedge\omega_k$, где $\omega_i\in\Lambda^{m_i}(U)$ — плюккеровы m_i-векторы, $i=1, \ldots, k$, и $\operatorname{div}\omega=\operatorname{div}\omega_1\ldots\operatorname{div}\omega_k$, то $K_\omega=K_{\omega_1}\oplus\ldots\oplus K_{\omega_k}$.*

Доказательство. Этот результат, являющийся частью теоремы 1 ([5]), был по существу доказан в работе ([5]). Здесь доказательство приводится для полноты изложения.

Заметим, что если $\mathfrak{p}$ — простой идеал высоты 1 в кольце A и $K_\omega=\{x\in U\,|\,x\wedge\omega=0\}$, то

$$\bigcap_{\text{выс. } \mathfrak{p}=1} K_{\omega,\mathfrak{p}}=K_\omega,$$

где $K_{\omega,\mathfrak{p}}=A_{\mathfrak{p}}K_\omega$. Действительно, $K_{\omega,\mathfrak{p}}\subset U_{\mathfrak{p}}$, поэтому

$$\bigcap_{\text{выс. } \mathfrak{p}=1} K_{\omega,\mathfrak{p}}\subset\bigcap_{\text{выс. } \mathfrak{p}=1} U_{\mathfrak{p}}=\bigcap_{\text{выс. } \mathfrak{p}=1}(A_{\mathfrak{p}}e_1\oplus\ldots\oplus A_{\mathfrak{p}}e_n)=$$

$$=Ae_1\oplus\ldots\oplus Ae_n=U, \text{ т. к. } \bigcap_{\text{выс. } \mathfrak{p}=1} A_{\mathfrak{p}}=A.$$

Очевидно, что $K_\omega\subset\bigcap_{\text{выс. } \mathfrak{p}=1} K_{\omega,\mathfrak{p}}\subset U$. Из равенства рангов A-модулей $\bigcap_{\text{выс. } \mathfrak{p}=1} K_{\omega,\mathfrak{p}}$ и K_ω следует, что для всякого вектора $y\in\bigcap_{\text{выс. } \mathfrak{p}=1} K_{\omega,\mathfrak{p}}$ суще-

ствует такой элемент $0 \neq a \in A$, что $ay \in K_\omega$, т. е. $ay \wedge \omega = 0$. Значит, $y \wedge \omega = 0$ и $y \in K_\omega$.

Таким образом, наше предложение достаточно доказать для случая, когда A — кольцо главных идеалов. Действительно, условия предложения сохраняются при локализации по любому простому идеалу $\mathfrak{p}$. Если мы докажем, что

$$K_{\omega,\mathfrak{p}} = K_{\omega_1,\mathfrak{p}} \oplus \ldots \oplus K_{\omega_k,\mathfrak{p}},$$

то

$$K_\omega = \bigcap_{\text{выс. } \mathfrak{p}=1} K_{\omega,\mathfrak{p}} = \bigcap_{\text{выс.}\mathfrak{p}=1} (K_{\omega_1,\mathfrak{p}} \oplus \ldots \oplus K_{\omega_k,\mathfrak{p}}) = K_{\omega_1} \oplus \ldots \oplus K_{\omega_k}.$$

Поэтому предположим, что A — кольцо главных идеалов. Тогда $\operatorname{div}\omega$, $\operatorname{div}\omega_i$ — главные дивизоры, которые мы будем считать лежащими в кольце A. Пусть

$$\omega' = \frac{\omega}{\operatorname{div}\omega}, \quad \omega_i' = \frac{\omega_i}{\operatorname{div}\omega_i};$$

тогда $\operatorname{div}\omega' = \operatorname{div}\omega_i' = 1$, $\omega' \in \Lambda^m(U)$, $\omega_i' \in \Lambda^{m_i}(U)$ и $\omega = \omega_1' \wedge \cdots \cdots \wedge \omega_k'$. Так как в кольце главных идеалов всякий плюккеров m-вектор вполне разложим, то $\omega_i' = x_{i1} \wedge \cdots \wedge x_{im_i}$, где $x_{ij} \in K_{\omega_i}$, $1 \leqslant i \leqslant k$, $1 \leqslant j \leqslant m_i$. В силу равенства $\operatorname{div}\omega_i' = 1$ отсюда следует ([4]), что $x_{i1}, \ldots, x_{im_i}$ свободно порождают A-модуль K_{ω_i}, а так как

$$\omega' = \omega_1' \wedge \ldots \wedge \omega_k' = x_{11} \wedge \ldots \wedge x_{1m_1} \wedge \ldots \wedge x_{k1} \wedge \ldots \wedge x_{km_k}$$

и $\operatorname{div}\omega' = 1$, то по тем же соображениям элементы $x_{11}, \ldots x_{1m_1}, \ldots x_{k1}, \ldots \ldots, x_{km_k}$ свободно порождают K_ω. Таким образом, равенство

$$K_\omega = K_{\omega_1} \oplus \ldots \oplus K_{\omega_k}$$

доказано локально, а следовательно, и глобально.

Определение. Подмодуль M свободного модуля U называется замкнутым, если для всякого $0 \neq u \in U$ из равенства $au \in M$ $(0 \neq a \in A)$ следует, что $u \in M$.

Следствие. *Пусть A — кольцо Крулля, U — свободный A-модуль ранга $n > 2$ и M — его замкнутый подмодуль ранга $m < n - 1$. Тогда для всякого целого k, $m \leqslant k < n - 1$, существует такой свободный конечнопорожденный подмодуль F модуля U, что $M \oplus F$ — замкнутый модуль ранга k.*

Доказательство. Будем вести индукцию по $k - m$. Так как при $k = m$ доказывать нечего, то предположим, что для значения разности $k - m$, на единицу меньшего данного, требуемый свободный модуль F ранга $k - m - 1$ найден.

Пусть $\omega \in \Lambda^m(U)$, и пусть $K_\omega = \{x \in U \mid x \wedge \omega = 0\}$. A-модули вида K_ω для всевозможных $\omega \in \Lambda^m(U)$ при $m = 1, \ldots, n$ замкнуты в U; легко показать, что верно и обратное — всякий замкнутый подмодуль ранга $m < n$ модуля U имеет вид K_ω для некоторого m-вектора $\omega \in \Lambda^m(U)$. Так как

$M\oplus F$ — замкнутый подмодуль ранга $k-1$ в модуле U, то $M\oplus F=K_\omega$ для некоторого $\omega\in\Lambda^{k-1}(U)$. В силу предложения 3 существует вектор $u\in U$, для которого $\omega\wedge u\neq 0$ и $\operatorname{div}(\omega\wedge u)=\operatorname{div}\omega$. По предложению 4 отсюда следует, что $K_\omega\cap K_u=0$ и $K_\omega\oplus K_u=K_{\omega\wedge u}$. Из равенства $\operatorname{div}(\omega\wedge u)=\operatorname{div}\omega$ вытекает, что $\operatorname{div}u=1$. Очевидно, $K_u=\{x\in U\mid x\wedge u=0\}=\{x\in U\mid ax=bu$ для некоторых a, $b\neq 0$ из $A\}$. Взяв дивизоры обеих частей равенства $ax=bu$, получаем, что b делится на a. Следовательно, $x\in Au$. Значит, $K_u=Au$ и $K_\omega\oplus Au$ — замкнутый модуль. Теперь в качестве искомого свободного модуля можно взять модуль $F\oplus Au$. Следствие доказано.

Пусть F — произвольный свободный A-модуль ранга k, $f_1, \ldots, f_k$ — его образующие и m — целое число, меньшее k. Как уже говорилось, элементы вида $f_{i_1}\wedge\ldots\wedge f_{i_m}$, где $1\leqslant i_1<\ldots<i_m\leqslant k$, образуют базис свободного A-модуля $\Lambda^m(F)$, а одночлены вида $f_{j_1}\wedge\ldots\wedge f_{j_{k-m}}$, где $1\leqslant j_1<\ldots<j_{k-m}\leqslant k$, — базис свободного A-модуля $\Lambda^{k-m}(F)$. Введем отображение $\Psi_{k,m}\colon\Lambda^m(F)\to\Lambda^{k-m}(F)$, положив

$$\Psi_{k,m}(f_{i_1}\wedge\ldots\wedge f_{i_m})=f_{j_1}\wedge\ldots\wedge f_{j_{k-m}},$$

где $j_1<\ldots<j_{k-m}$ — однозначно определенный набор индексов, дополняющий набор $i_1<\ldots<i_m$ до отрезка натурального ряда 1, 2, ..., k. Понятно, что $\Psi_{k,m}$ — изоморфизм свободных A-модулей $\Lambda^m(F)$ и $\Lambda^{k-m}(F)$. Обратным к отображению $\Psi_{k,m}$ является изоморфизм $\Psi_{k,m}^{-1}=\Psi_{k,k-m}$.

ЛЕММА 2. *Множество плюккеровых элементов в $\Lambda^m(F)$ при отображении $\Psi_{k,m}$ переходит во множество плюккеровых элементов из $\Lambda^{k-m}(F)$.*

Доказательство. Достаточно показать, что прообраз плюккерова $(k-m)$-вектора плюккеров. Пусть

$$\beta=\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_m\leqslant k}b_{i_1\ldots i_m}f_{i_1}\wedge\ldots\wedge f_{i_m}\in\Lambda^m(F)$$

и

$$\gamma=\sum_{1\leqslant j_1<\ldots<j_{k-m}\leqslant k}c_{j_1\ldots j_{k-m}}f_{j_1}\wedge\ldots\wedge f_{j_{k-m}}\in\Lambda^{k-m}(F),$$

причем $\Psi_{k,m}(\beta)=\gamma$ и γ — плюккеров $(k-m)$-вектор.

Очевидно,

$$\Psi_{k,m}(\beta)=\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_m\leqslant k}b_{i_1\ldots i_m}\Psi_{k,m}(f_{i_1}\wedge\ldots\wedge f_{i_m})=$$

$$=\sum_{1\leqslant j_1<\ldots<j_{k-m}\leqslant k}b_{i_1\ldots i_m}f_{j_1}\wedge\ldots\wedge f_{j_{k-n}},$$

причем в каждом слагаемом вида $b_{i_1\ldots i_m}f_{j_1}\wedge\ldots\wedge f_{j_{k-m}}$

$$\{i_1,\ldots,i_m\}\cup\{j_1,\ldots,j_{k-m}\}=\{1,\ldots,k\}.$$

Следовательно, $c_{j_1\ldots j_{k-m}}=b_{i_1\ldots i_m}$, где

$$\{i_1,\ldots,i_m\}\cup\{j_1,\ldots,j_{k-m}\}=\{1,\ldots,k\}.$$

По определению плюккеровость $(k-m)$-вектора $\gamma\in\Lambda^{k-m}(F)$ означает, что

$$\sum_{t=0}^{m}(-1)^t c_{h_1\ldots h_{k-m-1}j_t}c_{j_0\ldots\hat{j}_t\ldots j_{k-m}}=0$$

для любых наборов $1\leqslant h_1<\ldots<h_{k-m-1}\leqslant k$, $1\leqslant j_0<\ldots<j_{k-m}\leqslant k$. Покажем, что для любых наборов $1\leqslant i_1<\ldots<j_{m-1}\leqslant k$, $1\leqslant k_0<\ldots<k_m\leqslant k$

$$\sum_{s=0}^{m}(-1)^s b_{i_1\ldots i_{m-1}k_s}b_{k_0\ldots\hat{k}_s\ldots k_m}=0.$$

Пусть $j_0<\ldots<j_{k-m}$ — упорядоченный набор чисел, дополняющий $i_1<\ldots<i_{m-1}$ до $\{1, \ldots, k\}$, и $h_1<\ldots<h_{k-m-1}$ — такой же набор для $k_0<\ldots<k_m$. Тогда

$$b_{k_0\ldots\hat{k}_s\ldots k_m}=c_{h_1\ldots k_s\ldots h_{k-m-1}},$$

где $k_s\notin\{h_1, \ldots, h_{k-m-1}\}$ и $h_1<\ldots<k_s<\ldots<h_{k-m-1}$.

Условимся обозначать наборы $i_1, \ldots, i_{m-1}$, $j_0, \ldots, j_{k-m}$ и т. д. соответствующей буквой в фигурных скобках, например, $\{h_1, \ldots, h_{k-m-1}\}=\{h\}$.

В отрезке натурального ряда 1, 2, ..., k перед числом k_s находится ровно k_s-1 число, из них s чисел из набора $\{k\}=\{k_0, \ldots, k_m\}$ и k_s-1-s чисел из набора $\{h\}=\{h_1, \ldots, h_{k-m-1}\}$ (так как $\{h\}\cup\{k\}=\{1, 2, \ldots, k\}$). Таким образом, для перемещения k_s в ряду $h_1, \ldots, k_s, \ldots, h_{k-m-1}$ на последнее место нужно сделать $(k-m-1)-(k_s-1-s)=k-k_s+s-m$ транспозиций. Поэтому

$$b_{k_0\ldots\hat{k}_s\ldots k_m}=c_{h_1\ldots k_s\ldots h_{k-m-1}}=(-1)^{k-k_s+s-m}c_{h_1\ldots h_{k-m-1}k_s}.$$

Далее, при подсчете суммы $\sum_{s=0}^{m}(-1)^s b_{i_1\ldots i_{m-1}k_s}b_{k_0\ldots\hat{k}_s\ldots k_m}$ достаточно учитывать лишь те слагаемые, где $k_s\notin\{i_1, \ldots, i_{m-1}\}$, так как иначе $b_{i_1\ldots i_{m-1}k_s}=0$. Обозначим через r_s число элементов в ряду $i_1<\ldots<i_{m-1}$ больших k_s, и вычислим $b_{i_1\ldots i_{m-1}k_s}$. Так как $\{i\}\cup\{j\}=\{1, \ldots, k\}$ и $k_s\notin\{i\}$ то $k_s=j_{t_s}$ для некоторого $0\leqslant t_s\leqslant k-m$. Тогда

$$b_{i_1\ldots i_{m-1}k_s}=(-1)^{r_s}b_{i_1\ldots k_s\ldots i_{m-1}}.$$

Дополнением набора $i_1<\ldots<k_s<\ldots<i_{m-1}$ в $\{1, 2, \ldots, k\}$ является набор $j_0<\ldots<\hat{j}_{t_s}<\ldots<j_{k-m}$, поэтому

$$b_{i_1\ldots k_s\ldots i_{m-1}}=c_{j_0\ldots\hat{j}_{t_s}\ldots j_{k-m}},\ \text{а}\ b_{i_1\ldots i_{m-1}k_s}=(-1)^{r_s}c_{j_0\ldots\hat{j}_{t_s}\ldots j_{k-m}}.$$

Определим теперь номер t_s. В ряду $i_1<\ldots<k_s<\ldots<i_{m-1}$ слева от k_s находится $(m-1)-r_s$ чисел (по определению числа r_s). Всего имеется k_s-1 натуральное число из ряда 1, 2, ..., k, меньшее k_s. Часть из этих чисел попадает в $\{i\}$, оставшаяся часть — в $\{j\}$. Так как в последовательности $\{i\}$ имеется $m-1-r_s$ чисел, меньших k_s, то оставшиеся

$(k_s-1)-(m-1-r_s)=k-m+r_s$ чисел содержатся в $\{j\}$. Таким образом, перед $k_s=j_{t_s}$ в ряду $j_0<\ldots<j_{t_s}<\ldots<j_{k-m}$ находится k_s-m+r_s чисел. Так как нумерация чисел в $\{j\}$ начинается с нуля, то $t_s=k_s-m+r_s$.

Итак,

$$b_{i_1\ldots i_{m-1}k_s}b_{k_0\ldots\hat{k}_s\ldots k_m}=(-1)^{r_s}c_{j_0\ldots\hat{j}_{t_s}\ldots j_{k-m}}(-1)^{k-k_s+s-m}c_{h_1\ldots h_{k-m-1}k_s}=$$

$$=(-1)^{k-m-k_s+r_s+s}c_{h_1\ldots h_{k-m-1}j_{t_s}}c_{j_0\ldots\hat{j}_{t_s}\ldots j_{k-m}},$$

где $t_s=k_s-m+r_s$. Так как

$$k-m-k_s+r_s+s=k-(k_s-m+r_s)+s=k-t_s+s,$$

то

$$(-1)^{k-m-k_s+r_s+s}=(-1)^{k+t_s+s}$$

и

$$\sum_{s=0}^{m}(-1)^s b_{i_1\ldots i_{m-1}k_s}b_{k_0\ldots\hat{k}_s\ldots k_m}=$$

$$=(-1)^k\sum_{s=0}^{m}(-1)^s(-1)^{s+t_s}c_{h_1\ldots h_{k-m-1}j_{t_s}}c_{j_0\ldots\hat{j}_{t_s}\ldots j_{k-m}}=$$

$$=(-1)^k\sum_{s=0}^{m}(-1)^{t_s}c_{h_1\ldots h_{k-m-1}j_{t_s}}c_{j_0\ldots\hat{j}_{t_s}\ldots j_{k-m}}.$$

Теперь заметим, что в сумме

$$\sum_{t=0}^{m}(-1)^t c_{h_1\ldots h_{k-m-1}j_t}c_{j_0\ldots\hat{j}_t\ldots j_{k-m}}$$

(которая равна нулю из-за плюккеровости $(k-m)$-вектора $\gamma\in\Lambda^{k-m}(F)$) те слагаемые $c_{h_1\ldots h_{k-m-1}j_t}c_{j_0\ldots\hat{j}_t\ldots j_{k-m}}$, у которых t не совпадает с каким-либо t_s при некотором s, равны нулю, так как тогда $j_t\notin\{k_0,\ldots,k_m\}$, откуда

$$j_t\in\{1,2,\ldots,k\}\setminus\{k_0,\ldots,k_m\}=\{h_1,\ldots,h_{k-m-1}\}$$

и $c_{h_1\ldots h_{k-m-1}j_t}=0$. Следовательно,

$$\sum_{s=0}^{m}(-1)^s b_{i_1\ldots i_{m-1}k_s}b_{k_0\ldots\hat{k}_s\ldots k_m}=$$

$$=(-1)^k\sum_{s=0}^{m}(-1)^{t_s}c_{h_1\ldots h_{k-m-1}j_{t_s}}c_{j_0\ldots\hat{j}_{t_s}\ldots j_{k-m}}=$$

$$=(-1)^k\sum_{t=0}^{m}(-1)^t c_{h_1\ldots h_{k-m-1}j_t}c_{j_0\ldots\hat{j}_t\ldots j_{k-m}}=0,$$

что и доказывает плюккеровость m-вектора $\beta\in\Lambda^m(F)$.

Перейдем теперь к доказательству нашей основной теоремы.

ТЕОРЕМА. *Пусть A — кольцо Крулля, $1<m<k<n$ — целые числа. Предположим, что кольцо A $m\times k$ и $k\times n$-плюккерово. Тогда кольцо A является $m\times n$-плюккеровым.*

Доказательство. Пусть $\omega\in\Lambda^m(U)$ — ненулевой плюккеров m-вектор над свободным модулем U ранга n. Нам нужно показать, что m-вектор ω вполне разложим. Применяя предложение 3 $k-m$ раз, получим векторы $u_1, \ldots, u_{k-m}\in U$, такие, что $\omega\wedge u_1\wedge\ldots\wedge u_{k-m}\neq 0$ и $\operatorname{div}(\omega\wedge u_1\wedge\ldots\wedge u_{k-m})=\operatorname{div}\omega$. В силу предложения 4

$$K_{\omega\wedge u_1\wedge\ldots\wedge u_{k-m}}=K_\omega\oplus K_{u_1}\oplus\ \ldots\ \oplus K_{u_{k-m}}.$$

Как мы уже видели при доказательстве следствия из предложения 3, $K_{u_i}=Au_i\,(i=1,\ \ldots,\ k-m)$, следовательно,

$$K_{\omega\wedge u_1\wedge\ldots\wedge u_{k-m}}=K_\omega\oplus Au_1\oplus\ \ldots\ \oplus Au_{k-m}.$$

Так как $\omega\wedge u_1\wedge\ldots\wedge u_{k-m}\in\Lambda^k(U)$ — плюккеров k-вектор, то по условию теоремы он вполне разложим, $\omega\wedge u_1\wedge\ldots\wedge u_{k-m}=y_1\wedge\ldots\wedge y_k$, где $y_1, \ldots, y_k\in U$. Из того, что $y_1\wedge(y_1\wedge\ldots\wedge y_k)=y_i\wedge(\omega\wedge u_1\wedge\ldots\wedge u_{k-m})=0$, вытекает, что $y_1\in K_{\omega\wedge u_1\wedge\ldots\wedge u_{k-m}}$, значит,

$$y_i=x_i+\sum_{j=1}^{k-m}c_{ij}u_j$$

для некоторых $x_i\in K_\omega$, $c_{ij}\in A$, $i=1, \ldots, k$. В силу плюккеровости m-вектора ω ранг $K_\omega=m$, поэтому после раскрытия скобок в произведении

$$\left(x_1+\sum_{j=1}^{k-m}c_{1j}u_j\right)\wedge\ \ldots\ \wedge\left(x_k+\sum_{j=1}^{k-m}c_{kj}u_j\right)$$

ненулевыми будут только слагаемые, содержащие ровно m-векторов из числа векторов $x_1, \ldots, x_k$ и все $k-m$ векторов $u_1, \ldots, u_{k-m}$. Пусть

$$\omega\wedge u_1\wedge\ \ldots\ \wedge u_{k-m}=\left(x_1+\sum_{j=1}^{k-m}c_{1j}u_j\right)\wedge\ \ldots\ \wedge\left(x_k+\sum_{j=1}^{k-m}c_{kj}u_j\right)=$$

$$=\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_m\leqslant k}b_{i_1\ldots i_m}x_{i_1}\wedge\ \ldots\ \wedge x_{i_m}\wedge u_1\wedge u_2\wedge\ \ldots\ \wedge u_{k-m}=$$

$$=\left(\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_m\leqslant k}b_{i_1\ldots i_m}x_{i_1}\wedge\ \ldots\ \wedge x_{i_m}\right)\wedge u_1\wedge\ \ldots\ \wedge u_{k-m},$$

где $b_{i_1\ldots i_m}\in A$. Так как $x_1, \ldots, x_k\in K_\omega\subset U$, то m-вектор

$$\mu=\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_m\leqslant k}b_{i_1\ldots i_m}x_{i_1}\wedge\ \ldots\ \wedge x_{i_m}\in\Lambda^m(U).$$

Из плюккеровости m-вектора $\omega\in\Lambda^m(U)$ следует, что с точностью до некоторого множителя из A m-вектор ω вполне разложим. Так как век-

торы этого разложения лежат в K_ω, то с точностью до некоторого $a_i \in A$ вектор $x_i \in K_\omega$ есть линейная комбинация векторов разложения m-вектора ω. Следовательно, каждое произведение $x_{i_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_m}$, а значит, и вся сумма

$$\sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_m \leqslant k} b_{i_1 \ldots i_m} x_{i_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_m},$$

пропорциональна m-вектору ω. Отсюда следует, что для некоторых $d_1, d_2 \neq 0$ из A $\mu = \frac{d_1}{d_2} \omega$. Так как

$$\mu \wedge u_1 \wedge \ldots \wedge u_{k-m} = \frac{d_1}{d_2} \omega \wedge u_1 \wedge \ldots \wedge u_{k-m} =$$

$$= \omega \wedge u_1 \wedge \ldots \wedge u_{k-m},$$

то $d_1 = d_2$ и $\mu = \omega$.

Докажем теперь полную разложимость m-вектора

$$\mu = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_m \leqslant k} b_{i_1 \ldots i_m} x_{i_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_m} \in \Lambda^m(U).$$

Пусть F — свободный A-модуль ранга k с образующими $f_1, \ldots, f_k$. Определим гомоморфизм $\varphi : F \to U$, положив $\varphi(f_i) = x_i$, $i = 1, \ldots, k$. Заметим, что φ не может быть вложением, так как ранг системы векторов $x_1, \ldots, x_k$ в U равен $m < k$. Каноническим образом индуцированный гомоморфизм $\Lambda^m\varphi : \Lambda^m(F) \to \Lambda^m(U)$ переводит разложимый m-вектор над F в разложимый m-вектор над U.

Пусть

$$\beta = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_m \leqslant k} b_{i_1 \ldots i_m} f_{i_1} \wedge \ldots \wedge f_{i_m} \in \Lambda^m(F).$$

Если мы покажем, что β — плюккеров m-вектор над F, то теорема будет доказана: по условию (кольцо A предполагалось $m \times k$-плюккеровым) m-вектор $\beta \in \Lambda^m(F)$ будет вполне разложим, следовательно, таким же будет и m-вектор $\omega = \mu \in \Lambda^m(U)$, являющийся образом β при отображении φ. Для доказательства плюккеровости m-вектора β нам потребуется явное выражение координат $b_{i_1 \ldots i_m}$ через элементы c_{ij} ($i = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, k - m$).

Так как

$$\mu \wedge u_1 \wedge \ldots \wedge u_{k-m} = \bigwedge_{i=1}^{k} \left(x_i + \sum_{j=1}^{k-m} c_{ij} u_j \right),$$

то, очевидно, коэффициент $b_{i_1 \ldots i_m}$ при $x_{i_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_m}$ в m-векторе μ равен минору порядка k следующей $(2k - m) \times k$-матрицы:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & c_{11} & \ldots & c_{1,k-m} \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & c_{21} & \ldots & c_{2,k-m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & c_{k1} & \ldots & c_{k,k-m} \end{pmatrix}.$$

Этот минор находится в столбцах с номерами i_1, ..., i_m, $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_m \leqslant k$ (это часть столбцов единичной $k \times k$-матрицы, входящей в C) и в последних $k-m$ столбцах матрицы C. Вычислим этот определитель, разлагая его последовательно по элементам первых m его столбцов. Так как первые m столбцов определителя представляют собой i_1-й, i_2-й, ..., i_m-й столбцы единичной $k \times k$-матрицы, то

$$b_{i_1 \ldots i_m} = (-1)^{1+i_1+1+(i_2-1)+1+(i_3-2)+1+\ldots+i_m-(m-2)} \begin{vmatrix} c_{j_1 1} & \ldots & c_{j_1, k-m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{j_{k-m} 1} & \ldots & c_{j_{k-m}, k-m} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{\frac{m(m-3)}{2}} (-1)^{\sum_{r=1}^{m} i_r} c_{j_1 \ldots j_{k-m}},$$

если через $c_{j_1 \ldots j_{k-m}}$ обозначить минор порядка $k-m$ матрицы $\| c_{ij} \|$ $1 \leqslant i \leqslant k$, $1 \leqslant j \leqslant k-m$, расположенный в столбцах j_1, ..., j_{k-m}; $j_1 < \ldots < j_{k-m}$ здесь таковы, что

$$\{j_1, \ldots, j_{k-m}\} \cup \{i_1, \ldots, i_m\} = \{1, \ldots, k\}.$$

Обозначим через β' m-вектор из $\Lambda^m(F)$, координаты $b'_{i_1 \ldots i_m}$ которого отличаются лишь знаками от координат $b_{i_1 \ldots i_m}$ m-вектора β, именно, положим

$$b'_{i_1 \ldots i_m} = c_{j_1 \ldots j_{k-m}} \quad (\{j\} \cup \{i\} = \{1, \ldots, k\}).$$

Тогда

$$\beta' = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_m \leqslant k} c_{j_1 \ldots j_{k-m}} f_{i_1} \wedge \ldots \wedge f_{i_m}.$$

Рассмотрим образ m-вектора $\beta' \in \Lambda^m(F)$ при отображении $\Psi_{k,m}$: $\Lambda^m(F) \to \Lambda^{k-m}(F)$. По определению этого отображения

$$\Psi_{k-m}(\beta') = \sum_{1 \leqslant j_1 < \ldots < j_{k-m} \leqslant k} c_{j_1 \ldots, j_{k-m}} f_{j_1} \wedge \ldots \wedge f_{j_{k-m}}.$$

Но последний $(k-m)$-вектор вполне разложим, так как

$$\sum_{1 \leqslant j_1 < \ldots < j_{k-m} \leqslant k} c_{j_1 \ldots j_{k-m}} f_{j_1} \wedge \ldots \wedge f_{j_{k-m}} =$$

$$= (c_{11} f_1 + c_{21} f_2 + \ldots + c_{k1} f_k) \wedge \ldots \wedge (c_{1, k-m} f_1 + c_{2, k-m} f_2 + \ldots$$

$$\ldots + c_{k,\, k-m} f_k).$$

Согласно лемме 2 отсюда вытекает плюккеровость m-вектора β'. Осталось проверить плюккеровость m-вектора β. По определению m-вектора β'

$$b_{i_1 \ldots i_m} = (-1)^{\frac{m(m-3)}{2}} (-1)^{\sum_{r=1}^{m} i_r} b'_{i_1 \ldots, i_m},$$

следовательно,

$$\sum_{s=0}^{m}(-1)^s b_{i_1\ldots i_{m-1}k_s}b_{k_0\ldots\hat{k}_s\ldots k_m} =$$

$$= (-1)^{m(m-3)}\sum_{s=0}^{m}(-1)^s(-1)^{\left(\sum_{r=1}^{m-1} i_r\right)+k_s} b'_{i_1\ldots i_{m-1}k_s}(-1)^{\left(\sum_{t=0}^{m} k_t\right)-k_s} b'_{k_0\ldots\hat{k}_s\ldots k_m} =$$

$$= (-1)^{\sum_{r=1}^{m-1} i_r+\sum_{t=0}^{m} k_t}\sum_{s=0}^{m}(-1)^s b'_{i_1\ldots i_{m-1}k_s}b'_{k_0\ldots\hat{k}_s\ldots k_m} = 0.$$

Таким образом, m-вектор β плюккеров и теорема доказана.

Поступило
15.X.1971

Литература

[1] Towber J., Complete redicibility in exterior algebras over free modules, J. Algebra, 10, № 3 (1968), 299—309.
[2] Lissner D., Geramita A., Towber rings, J. Algebra, 15, № 1 (1970), 13—41.
[3] Lissner D., Geramita A., Remarks on *OP* and Towber rings, Canad. J. Math., 22, № 6 (1970), 1109—1117.
[4] Клейнер Г. Б., О плюккеровых свойствах колец, Матем. сб., 84, № 4 (1971), 526—536.
[5] Клейнер Г. Б., О разложимости элементов внешней алгебры свободного модуля, Успехи матем. наук, XXVI, № 4 (1971), 235—236.
[6] Bourbaki N., Algebre commutative, Chap. 7, Paris, Hermann, 1965.
[7] Simis A., When are projective modules free? Queen's paper in pure and appl. Math., № 21 (1969), 1—254.