ПОЛИВЕКТОРЫ РАНГА 2

Г. Б. Клейнер

Пусть F — произвольное поле, U — n-мерное векторное пространство над ним, ω — ненулевой элемент m-й внешней степени $\Lambda^m(U)$ пространства U, $0 < m < n$.

Представление m-вектора ω в виде суммы k разложимых m-векторов над U называется минимальным разложением, а число k — рангом m-вектора ω, если ω не представим в виде суммы меньшего, чем k, числа разложимых поливекторов. Ранг разложимого поливектора считается равным 1.

Очевидно, ранг любого m-вектора $\omega \in \Lambda^m(U)$ конечен и не превосходит числа C_n^m.

Хорошо известны необходимые и достаточные условия разложимости поливектора $\omega = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_m \leqslant n} a_{i_1 \ldots i_m} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_m}$ ($e_1, \ldots, e_n$ — базис для U_m, $a_{i_1 \ldots i_m} \in F$) — ими являются соотношения Плюккера $\sum_{r=0}^{m} (-1)^r a_{i_1 \ldots i_{m-1} j_r} a_{j_0 \ldots \hat{j}_r \ldots j_m} = 0$, где $1 \leqslant i_1, \ldots, i_{m-1}, j_0, \ldots, j_m \leqslant n$. Вопрос о необходимых и достаточных условиях равенства ранг $\omega = k$ и, в частности, вопрос о существовании алгебраических соотношений между координатами m-вектора, эквивалентных неравенству ранг $\omega \leqslant k$ при $k > 1$, оставался открытым [1]. В настоящей заметке эта задача решается для $k = 2$. Именно, обозначим через E_ω^0 множество тех $x \in U$, для которых $x \wedge \omega = 0$ и через E_ω^1 — пространство, порожденное теми $x \in U$, для которых $x \wedge \omega$ — разложимый поливектор.

Теорема. *Для выполнения равенства ранг* $\omega = 2$ *необходимо и достаточно, чтобы* $\dim E_\omega^0 + \dim E_\omega^1 = 2m$.

Заметим, что для равенства ранг $\omega = 1$ необходимо и достаточно, чтобы $\dim E_\omega^0 = m$ ([2], следствие 1, п. 3 § 7 гл. III).

Коротко опишем доказательство теоремы.

1°. Лемма 1. *Пусть* U_ω^1 *— подпространство в* U, *порожденное векторами какого-либо минимального разложения* m-*вектора* ω, $U_\omega^2 \subset U$ *— подпространство, порожденное теми* $x \in U$, *для которых ранг* $(x \wedge \omega) <$ *ранг* ω, U_ω^3 *— наименьшее подпространство в* U, *обладающее тем свойством, что* $\omega \in \Lambda^m(U_\omega^3)$. *Тогда* $U_\omega^1 = U_\omega^2 = U_\omega^3$.

Действительно, пусть $\omega = x_1^1 \wedge \ldots \wedge x_m^1 + \ldots + x_1^k \wedge \ldots \wedge x_m^k$ — минимальное разложение m-вектора ω ($x_1^1, \ldots, x_m^k \in U$). Так как ранг $(x_i^j \wedge \omega) \leqslant k-1$, то $x_i^j \in U_\omega^2$ ($i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, k$); итак, $U_\omega^1 \subset U_\omega^2$. Обратно, пусть $x \in U_\omega^2$, т. е. $x = \sum_{i=1}^{s} a_i u_i$, где $a_i \in F$, ранг $(u_i \wedge \omega) <$ ранг ω. Согласно теореме 4 (ii) [1] $u_i \in U_\omega^1$ ($i = 1, \ldots, s$), откуда $x \in U_\omega^1$. Таким образом, $U_\omega^1 = U_\omega^2$. Так как $\omega \in \Lambda^m(\{x_1^1, \ldots, x_m^k\}) = \Lambda^m(U_\omega^1)$, то $U_\omega^3 \subset U_\omega^1$. Рассмотрим минимальное разложение $\omega = z_1^1 \wedge \ldots \wedge z_m^1 + \ldots + z_1^k \wedge \ldots \wedge z_m^k$ как m-вектор над U_ω^3. В силу минимальности $\omega = x_1^1 \wedge \ldots \wedge x_m^1 + \ldots + x_1^k \wedge \ldots \wedge x_m^k$ над U, $l \geqslant k$. С другой стороны, согласно теореме 3 [1] ранг поливектора над подпространством не больше, чем его ранг над пространством, поэтому $l = k$. По теореме 5 [1] отсюда вытекает, что $U_\omega^1 = \{x_1^1, \ldots, x_m^k\} = \{z_1^1, \ldots, z_m^l\} \subset U_\omega^3$, т. е. $U_\omega^1 = U_\omega^3$.

В дальнейшем подпространство $U_\omega^1 = U_\omega^2 = U_\omega^3$ мы будем обозначать через U_ω.

2°. Докажем необходимость условия теоремы. Пусть $\omega = x_1 \wedge \ldots \wedge x_m + y_1 \wedge \ldots \wedge y_m$ ($x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m \in U$) — минимальное разложение m-вектора ω. В силу теоремы 4 (i) [1] пересечение подпространств, порожденных $x_1, \ldots, x_m$ и $y_1, \ldots, y_m$, совпадает с E_ω^0, в то время как из леммы 1 следует, что $\{x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m\} = U_\omega = E_\omega^1$. Теперь очевидное равенство $\dim\{x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m\} = \dim\{x_1, \ldots, x_m\} +$

$+\dim\{y_1, \ldots, y_m\} - \dim(\{x_1, \ldots, x_m\} \cap \{y_1, \ldots, y_m\})$ превращается в требуемое равенство $\dim E^1_\omega = 2m - \dim E^0_\omega$.

3°. Перейдем к доказательству достаточности.

Лемма 2. *Если* $\dim E^0_\omega < m$, *а* $\dim E^1_\omega = 2m$, *то* $\dim U_\omega \leqslant 2m$.

Выберем базис $e_1, \ldots, e_n$ в U, первыми $2m$ векторами которого являются базисные векторы пространства E^1_ω и запишем ω в виде $\omega = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_m \leqslant n} a_{i_1 \ldots i_m} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_m}$, где $a_{i_1 \ldots i_m} \in F$. Обозначим через $\Pi(i_1, \ldots, i_{m-1} \mid i_m, \ldots, i_{2m})$ выражение $\sum_{r=m}^{2m} (-1)^{r+m} a_{i_1 \ldots i_{m-1} i_r} a_{i_m \ldots \hat{i}_r \ldots i_{2m}}$. Поскольку ранг $\omega \neq 1$, существует набор $1 \leqslant i_1, \ldots, i_{m-1}, j_0, \ldots, j_m \leqslant n$, для которого $\Pi(i_1, \ldots, i_{m-1} \mid j_0, \ldots, j_{2m}) \neq 0$. Для всякого $r = 0, 1, \ldots, m$ и $j > 2m$ $\Pi(i_1, \ldots, i_{m-1} \mid j_0, j, j_1, \ldots, j_{r-1}, j_{r+1}, \ldots, j_m) = 0$. Проделав необходимые вычисления, можно убедиться в том, что

$$a_{i_1} \ldots, i_{m-1} j_0 \Pi(i_1, \ldots, i_{m-1} \mid j, j_1, \ldots, j_m) = a_{i_1 \ldots i_{m-1} j} \Pi(i_1, \ldots, i_{m-1} \mid j_0, \ldots, j_m) = 0,$$

следовательно, для всякого $j > 2m$ $a_{i_1 \ldots i_{m-1} j} = 0$. Отсюда при помощи равенства $\Pi(i_1, \ldots, i_{m-1} \mid t_0, \ldots, t_m) = 0$, справедливого для всех $t_i > 2m$, выводится, что $a_{t_1 \ldots t_m} = 0$. Это означает, что фактически $\omega \in \Lambda^m(\{e_1, \ldots, e_{2m}\})$, т. е. $\dim U_\omega \leqslant 2m$.

4°. Лемма 3. *Пусть* $v_1, \ldots, v_m$ — *векторы из* U, *определенные равенствами* $v_i = \sum_{r=1}^{n} a_{i \ldots (i-1) r (i+1) \ldots m} e_r$ *и* $\Delta_{i_1 \ldots i_m}$ — *координата их внешнего произведения* $v_1 \wedge \cdots \wedge v_m \in \Lambda^m(U)$ *при базисном поливекторе* $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_m}$. *Фиксируем набор* $1 \leqslant j_1, \ldots, j_m \leqslant n$ *и предположим, что соотношения Плюккера* $\Pi(k_1, \ldots, k_{m-1} \mid k_m, \ldots, k_{2m}) = 0$ *выполнены для координат* $a_{i_1 \ldots i_m}$ m-*вектора* ω, *если* $k_i \in \{1, 2, \ldots, m, j_1, \ldots, j_m\}$ *для всякого* $1 \leqslant i \leqslant 2m$. *Тогда* $\Delta_{j_1 \ldots j_m} = (a_{1 \ldots m})^{m-1} a_{j_1 \ldots j_m}$.

Доказательство леммы проводится индукцией по m.

5°. Завершим доказательство достаточной части теоремы, воспользовавшись индукцией по $\dim E^0_\omega$. Пусть $\dim E^0_\omega = 0$. В силу леммы 2 можно считать, что $n = \dim U = 2m$. Из сказанного в п. 3 следует, что для любого набора $j_1, \ldots, j_m$, кроме $j_1 = m+1, \ldots, j_m = 2m$, $\Pi(1, 2, \ldots, m-1 \mid m, j_1, \ldots, j_m) = 0$. Следовательно, разложимый m-вектор $v_1 \wedge \ldots \wedge v_m$ отличается от m-вектора $(a_{1 \ldots m})^{m-1} \omega$ только координатой $\Delta_{(m+1) \ldots 2m}$ при $e_{m+1} \wedge \ldots \wedge e_{2m}$. Таким образом,

$$\omega = (a_{1 \ldots m})^{1-m} v_1 \wedge \cdots \wedge v_m + (a_{(m+1) \ldots 2m} - \Delta_{(m+1) \ldots 2m} (a_{1 \ldots m})^{1-m}) e_{m+1} \wedge \cdots \wedge e_{2m},$$

т. е. ранг $\omega \leqslant 2$. Поскольку $\dim E^0_\omega = 0$, ранг $\omega = 2$.

Если $E^0_\omega \neq 0$, то поливектор $\omega \in \Lambda^m(U)$ можно представить в виде $\omega = z \wedge \omega'$, где $z \in U$, а ω' — такой $(m-1)$-вектор, что $E^1_\omega = E^1_{\omega'} \oplus \{z\}$. Теорема следует теперь из индукционного предположения, примененного к поливектору ω', для которого $\dim E^0_{\omega'} < \dim E^0_\omega$.

В заключение благодарю Е. С. Голода за ценные обсуждения этой работы.

ЛИТЕРАТУРА

[1] M. J. S. Lim, Rank k Grassman products, Pacif. J. Math. **29**:2 (1969), 367—374.
[2] Н. Бурбаки, Линейная и полилинейная алгебра, М., Физматгиз, 1962.

Поступило в Правление общества 25 октября 1973 г.