# О СИСТЕМАХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ НАД КОММУТАТИВНЫМИ КОЛЬЦАМИ

Г. Б. Клейнер

Пусть $R$ — коммутативное целостное кольцо с единицей, $A$ — $m \times n$-матрица ранга $r$ ($m \leqslant n$), $b$ — $m$-мерный вектор-столбец и $x$ — $n$-мерный вектор-столбец над $R$. В недавней статье [1] изучались системы линейных уравнений вида

$$Ax = b \tag{1}$$

над некоторыми классами коммутативных колец. Были найдены, в частности, необходимые и достаточные условия разрешимости системы (1) для случая дедекиндова (и прюферова) кольца $R$. В настоящей работе дается ряд необходимых и достаточных условий разрешимости систем линейных уравнений над произвольными целостными кольцами и над кольцами Крулля.

Определение. Пусть $P$ — множество простых идеалов высоты 1 кольца $R$. Модуль $M$ над $R$ назовем *рефлексивным*, если $\bigcap\limits_{\mathfrak{p} \in P} M\mathfrak{p} = M$.

Если $R$ — кольцо Крулля, а $M$ и $M^* = \mathrm{Hom}_R(M, R)$—конечно-порожденные модули, то, как показано в [2], введенное понятие совпадает с классической рефлексивностью модуля $M$ в смысле канонического изоморфизма $M \cong M^{**}$.

Обозначим через $\mathfrak{A}$ подмодуль свободного модуля $R^m$, порожденный столбцами матрицы $A$, и через $d_k(\mathfrak{A})$ ($k = 1, \ldots, m$) дивизор идеала, порожденного в $R$ координатами всех $k$-векторов из канонического образа $k$-й внешней степени $\Lambda^k(\mathfrak{A})$ подмодуля $\mathfrak{A}$ в $k$-й внешней степени $\Lambda^k(R^m)$ модуля $R^m$. Очевидно, что $d_k(\mathfrak{A})$ совпадает с $d_k(A)$—дивизором идеала, порожденного всеми минорами порядка $k$ матрицы $A$.

Одним из необходимых условий совместности системы (1) является равенство рангов матрицы $A$ и расширенной матрицы $A|b$. Системы, для которых это условие выполнено, будем называть *согласованными по рангу*.

Теорема 1. *Пусть $R$ — кольцо Крулля, $A$ — $m \times n$-матрица ранга $r$ над $R$. Следующие условия эквивалентны*: (а) *всякая согласованная по рангу система $Ax = b$ разрешима*, (б) *модуль $\mathfrak{A}$ рефлексивен и $d_r(\mathfrak{A}) = 1$*.

Доказательство. Условие (а) эквивалентно замкнутости модуля $\mathfrak{A}$ в $R^m$ в смысле [2]. Можно показать, что замкнутый модуль над кольцом Крулля рефлексивен. Пользуясь следствием из § 1 [2], заключаем, что $d_r(\mathfrak{A}) = 1$. Обратно, если модуль $\mathfrak{A}$ рефлексивен и $d_r(\mathfrak{A}) = 1$, то он замкнут в силу леммы 1.1 [2].

Известно ([1], теорема 7), что при условии согласованности по рангу равенство $d_r(A) = d_r(A|b)$ является необходимым для совместности системы (1), а для дедекиндовых колец — и достаточным [1]. Этот результат представляет собой частный случай следующей теоремы.

Теорема 2. *Пусть $R$ — кольцо Крулля, $A$ — $m \times n$-матрица ранга $r$, $b$ — $m$-мерный вектор. Если модуль $\mathfrak{A}$, порожденный столбцами матрицы $A$, рефлексивен, то для разрешимости системы $Ax = b$ необходимо и достаточно, чтобы ранг $A$ = ранг $(A|b)$ и $d_r(A) = d_r(A|b)$.*

С каждой системой (1) над произвольным целостным кольцом можно связать точную последовательность $R$-модулей:

$$0 \to K_A \to G_{A|b} \to J_{A|b} \to 0, \tag{2}$$

где

$$K_A = \{y \in R^n | Ay = 0\},\ G_{A|b} = \{y \in R^n | (Ay) \wedge b = 0\},\ J_{A|b} = G_{A|b}/K_A.$$

Легко видеть, что модуль $J_{A|b}$ не имеет кручения, а его ранг равен 1 или 0 в зависимости от того, согласована система по рангу или нет.

Пусть $a \in R$. Обозначим через $r(a)$ ранг над кольцом $\overline{R} = R/aR$ матрицы $\overline{A}$, являющейся образом матрицы $A$ при отображении, индуцированном гомоморфизмом $R \to \overline{R}$.

Определение. Скажем, что матрица $A$ имеет постоянный ранг $r$, если $r(a) = r$ для любого элемента $a \in R$.

Можно доказать, что матрица $A$ ранга $r$ имеет постоянный ранг $r$, если и только если $d_r(A)=1$.

Будем в дальнейшем понимать под дивизором $\operatorname{div} b$ вектора $b$ дивизор идеала, порожденного в $R$ его координатами.

Теорема 3. *Пусть $R$ — произвольное целостное кольцо, $A$ — $m \times n$-матрица постоянного ранга и $b$ — $m$-мерный вектор с $\operatorname{div} b = 1$. Тогда для разрешимости системы $Ax = b$ необходимо и достаточно, чтобы $J_{A|b} \cong R$.*

Доказательство. Предположим, что $Ax = b$ для некоторого вектора $x \in R^n$. Покажем, что $G_{A|b} = Rx \oplus K_A$. Пусть $y$ — произвольный вектор из $G_{A|b}$. Как легко видеть, существует ненулевой элемент $a \in R$ такой, что $ay \in Rx \oplus K_A$, $ay = a'x + z$, где $a' \in R$, $z \in K_A$. Отсюда $aAy = a'Ax = a'b$. Переходя к дивизорам, получим $a \operatorname{div} A(y) = a' \operatorname{div} b = a'$, значит, $a = a'a''$ и $z = az'$, где $a'' \in R$, $z' \in K_A$. Таким образом, $y = a''x + z' \in Rx \oplus K_A$. Обратно, если $J_{A|b} \cong R$, то $G_{A|b} = Rx \oplus K_A$ для некоторого вектора $x \in G_{A|b}$. Покажем, что $Ax = b$. Для этого достаточно доказать равенство $\operatorname{div}(Ax)=1$. Если $\operatorname{div}(Ax)\neq 1$, то существуют элементы $a_1 \neq 0$, $a_2 \in R$ такие, что $a_1 Ax = 0$ по модулю $a_2$. Из условия постоянства ранга матрицы $A$ можно вывести, что $a_1 \Delta_r x \in K_A$ по модулю $a_2$, где через $\Delta_r$ обозначен некоторый минор порядка $r$ матрицы $A$, не являющийся делителем нуля в $R/a_2R$. Это означает, что существуют $y \in R^n$ и $t \in K_A$ такие, что $a_1 \Delta_r x + t = a_2 y$. Так как $G_{A|b} = Rx \oplus K_A$ и $y$, очевидно, лежит в $G_{A|b}$, то $a_1 \Delta_r$ делится на $a_2$ — противоречие.

Замечание. Необходимая часть теоремы верна и без предположения $\operatorname{div} b = 1$. Для доказательства достаточной части не требуется условие постоянства ранга матрицы $A$.

Как показывает следующая теорема, в некоторых случаях разрешимость системы (1) при выполнении необходимого равенства $d_r(A)=d_r(A|b)$ обеспечивается более слабым, чем $J_{A|b} \cong R$, условием.

Теорема 4. *Пусть дана согласованная по рангу система* (1) *над некоторым кольцом $R$, причем $d_r(A)=d_r(A|b)$. Предположим, что $K_A$ выделяется в $G_{A|b}$ прямым слагаемым. Тогда, если выполнено одно из двух условий*: а) *$R$ — кольцо Крулля*, б) *$A$ — матрица постоянного ранга и $G_{A|b}$ — проективный $R$-модуль, то система* (1) *разрешима.*

ЛИТЕРАТУРА

[1] P. Camion, L. S. Levy, H. B. Mann, Linear equations over a commutative ring, J. Algebra 18:3 (1971), 432—446.

[2] Г. Б. Клейнер, О плюккеровых свойствах колец, Матем. сб. 84 (126):4 (1971), 526—536.

[3] Г. Б. Клейнер, Круллевы $OP$-кольца плюккеровы, Изв. АН, сер. матем. 37:2 (1973), 289—307.

Поступило в Правление общества 4 марта 1973 г.